Logica: formeel en informeel

DEEL I - TRADITIONELE LOGICA

Hoofdstuk 1 – Logica, redeneringen en geldigheid

1.1 Logica

⚠ Goed te kennen:

- definities
- vergelijkingen (objectivisten, psychologisten, anti-psychologisten... ; wetten van: waar zijn, geldig zijn, denken...)

Sleutelaspecten van logisch redeneren
(afgeleid uit het gebruik van "logisch" uit de gewone taal)

- Er wordt een grond gegeven
- Er is een zekere onontkoombaarheid van de volgende stap / conclusie
- Er is coherentie (cf. "gekken hebben hun eigen logica")
- De redenering heeft een hypothetisch karakter (iets volgt logisch *als* bepaalde aannamen aanvaard zijn)

Definitie van Copi (1978) probeert bij dagelijks taalgebruik aan te sluiten: *logica is de studie van de methoden en beginselen die gebruikt worden om goed (correct) van slecht (niet correct) redeneren te onderscheiden*. Hier zijn wel twee bezwaren tegenin te brengen. Ten eerste zijn een aantal termen blijven onduidelijk ("methoden", "beginselen", "geldigheid"). Ten tweede is het begrip "logica" geen eenduidig begrip: er zijn veel verschillende definities en ook door de geschiedenis heen is er vrij verschillend over logica gedacht.

Aristoteles' (384-322; beschouwd als de grondlegger van de logica) definitie: *Het onderzoek inzake het ontstaan van redeneringen* (hoe worden ze opgebouwd?)*, hun ontdekking* (gegeven hun opbouw: hoe vind je de "middenterm" die subject en predicaat van de conclusie met elkaar verbindt?) *en hun validatie* (bijvoorbeeld door terugvoering op reeds als geldig erkende redeneringen). Dit is een definitie van formele logica, door Aristoteles "analytica" genoemd. Hiertegenover plaatst Aristoteles de "dialectiek", bij ons gekend als "argumentatietheorie", waar het voor A op aan komt een methode te vinden waardoor wij, uitgaande van het plausibele (het aannemelijke), over elk voorgesteld probleem kunnen redeneren én vermijden dat wij, een stelling verdedigend, onszelf tegenspreken.
→ analytica: focus op geldigheid
→ dialectiek: focus op gronden of argumenten
N.B.: de grenzen tussen beiden zien niet scherp te trekken.

Definitie van Thomas van Aquino (125-1275) in een commentaar op Aristoteles: *Een noodzakelijke kundigheid* (ars) *die leiding geeft aan de verstandsact zelf, waardoor de mens namelijk in die act van het verstand geordend, met gemak en zonder dwaling te werk gaat.* Bij de verstandsact dacht Thomas aan drie activiteiten: het begrip, het oordeel en de redenering. Men zou een redenering kunnen zien als bestaand uit oordelen, die op hun beurt verbindingen van begrippen zijn. Dit is een relatief psychologische benadering; Aristoteles' terminologie is minder psychologisch en meer taal- of rekenkundig, nl. de redenering nemend als een tekst opgebouwd uit zinnen die weer in woorden of termen geanalyseerd kunnen worden.

Een psychologische terminologie zoals die van Thomas hoeft nog geen psychologische opvatting in te sluiten, zoals blijkt bij Immanuel Kant (1787), wie zegt dat *logica enerzijds de wetenschap is die de formele regels van elk denken behandelt en bewijst, en anderzijds dat grensoverschrijdingen vanuit de logica naar de psychologie en metafysiek geen uitbreiding maar een verminking van de logica zijn*. Tegen het psychologisme dat de logica als een tak van de psychologie beschouwd - wat haar afhankelijk van het voorstelbare maakt, aan zekerheid doet inboeten en aan exactheid doet verliezen treden Frege en Husserl op. Volgens hen gaat het niet op wat psychologisten zeggen, nl. dat de logica het redeneren regelt en dus een psychologie is, omdat redeneren een psychische activiteit is. Frege (1848-1925; beschouwd als tweede grondlegger van de logica) sluit zich eerder aan bij Kant, maar om elke vorm van psychologisme te vermijden zegt Frege dat *logica gaat over de wetten van het waar-zijn,* geen cultuurafhankelijke maar objectivistisch geïnterpreteerde denkwetten die in het rijk van het objectief liggen en dus van het subject onafhankelijk zijn. Het denken moet zich aan deze wetten houden wil het waarheid bewaren. Echter, waarheid treedt in de logica niet 'absoluut', maar slechts 'hypothetisch' op: het is de geldigheid van ware of onware redeneringen die centraal staat. Dopp (1965) zegt zo dat "*de formele logica zich slechts interesseert voor de geldigheid van redeneringen*". Misschien bedoelde Frege het ook wel zo; dan zou de definitie van Strawson (1973) hier goed bij aansluiten, waar hij zegt dat *logica de wetenschap is van de algemene vormen van proposities en van hun relaties van afleidbaarheid of waarheidsafhankelijkheid*.

Logica werd wel eens gezien als instrument van wetenschappelijk bedrijf, zoals bij Husserl (1900), wie zegt dat *de logica op de meest algemene wijze de ideale mogelijkheidsvoorwaarden van wetenschap betreft*. Nu wordt er een breder toepassingsgebied aan de logica erkent. Met De Pater (1980) zou men zelfs kunnen zeggen dat *logica de meest algemene theorie is van samenhangen of structuren, en aldus het werktuig bij uitstek voor de analyse van systemen van tekens en betekenissen, en daardoor dus ook het redeneren*. De logica is dan de wetenschap van de ordening. Gezien het ordenen toekomt aan de menselijke rede, zegt Bastable (1975) in die zin dat *logica de grammatica van de redelijkheid* is. Ook zouden we kunnen zeggen: logica is het besef van het benul.

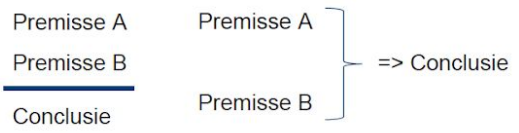
De eerstvolgende stap in de vraag naar de aard van de logica is: wat is een redenering?

1.2 Redeneringen: redeneerschema's

Definitie Aristoteles: *Een redenering is een (gesproken of geschreven) tekst waarin uit het gestelde iets anders dan het gestelde met noodzaak volgt krachtens het gestelde.* Heeft echter slechts betrekking op geldige redeneringen, en 'met noodzaak volgen' is nog wat vaag. Maar onderscheid tussen een gegeven of het gestelde (premissen) en wat daaruit volgt (conclusie) is wel meteen duidelijk. Om beide elementen uit een redenering te kunnen halen, is het opstellen van een redeneerschema belangrijk.

Redeneerschema is een analyse van een argumentatieve tekst in termen van premissen en conclusies. Kan weergegeven worden in tekst of met letters. Een redeneerschema in tekst maakt gebruik van een horizontale streep waar de premisse(n) erboven worden geschreven, de conclusie eronder. Bij een redeneerschema in letters worden de zinnen vervangen door een letter, waarbij de conclusie wordt aangeduid met een ⇒.

Inferentiële implicatie = horizontale streep / ⇒ = "gegeven de premissen mag men besluiten tot" = dus.



Het argumentatief karakter van teksten wordt vaak verhuld door uitweidingen, bespelingen van gevoelens en onderbrekingen van de gedachtegang. Bovendien heeft men te maken met complexe redeneringen, waar de conclusie van de eerste redenering tegelijk de premisse is van een tweede; men spreekt dan van een tussen-conclusie.

Vuistregel of er sprake is van redenering:
kijk of er iets geponeerd wordt als volgend uit iets anders.

Voorbeeld:

- Als psychologie een wetenschap is, bevat ze stellingen → geen redenering
- Aangezien psychologie een wetenschap is, bevat ze stellingen → redenering

Woorden als "aangezien", "dus", "daarom", "want", "welnu" etc. worden redeneringsindicatoren genoemd.

1.3 Geldigheidsbeoordeling: redeneervormen

Interferentiële implicatie staat centraal bij het opstellen van een redeneerschema. Het gaat daarin om geldigheid. Maar wat is geldigheid, en wanneer is een redenering geldig? Hoe kan je weten wanneer iets geldig is? De formele logica probeert het inhoudelijke aspect van redeneringen te overstijgen om dit abstracte begrip van geldigheid te vatten. Een onware redenering kan daarom wel geldig zijn, een redenering is immers geldig dan en slechts dan als wanneer de premissen waar zijn, dan ook noodzakelijk de conclusie waar is. En voor die aanvaarding is de structuur, de vorm van de redenering belangrijk. N.B.: als een geldige redenering ware premisse(n) heeft, is dat een bewijs. Een manier om de geldigheid van een redenering na te gaan is het het geven van tegenvoorbeelden, waarbij de structuur van de redenering behouden wordt, maar de inhoud wordt veranderd.

Definitie van geldigheid: *Een redenering is geldig desda (dan en slechts dan als): wanneer de premisse(n) waar zijn / is, dan is noodzakelijk ook de conclusie waar.* Een tweede definitie, die het woord "waar" vermijdt, volgt hieruit: *Een redenering is geldig desda men de conclusie niet kan ontkennen zonder in tegenspraak te komen met minstens één van de premissen.*

Tot (on)geldigheid wordt besloten aan de hand van een *redeneervorm*, een soort abstracte dieptestructuur van de redenering die bereikt wordt door het vervangen van concrete uitdrukkingen voor variabelen. Variabelen zijn open plaatsen voor constanten; een constante is een uitdrukking die geacht wordt een vaste betekenis te hebben (in een gegeven systeem). Een variabele is dus een parkeerplaats voor een constante, een gat waarin je van alles kunt gooien, als je je maar houdt aan de categorie die de variabele geacht wordt te representeren. De variabelen *p, q, r* en andere letters in de buurt worden in het boek voor uitspraken / proposities gebruikt; *a, b, c* en dergelijke voor subjecten en predicaten in de syllogistiek. In de predicatenlogica doet *x* dienst als variabele voor individuen; in de relatielogica staat *R* voor een relatie. Er zijn dus meersoortige variabelen.

Belangrijk: redeneervormen horen altijd bij een bepaald logisch systeem en kunnen alleen binnen dat systeem op hun geldigheid worden beoordeeld! Redeneervormen dienen slechts door hun samenhang in een logisch systeem, waarin zij als logische regels gelden, gefundeerd op corresponderende logische wetten (uitspraken die noodzakelijk waar zijn). Een logische regel kan

worden gezien als een vertaling van een logische wet, die op zeer abstracte wijze noodzakelijke waarheid formuleert. Wetten verwijzen naar de fundamenteel theoretische kant van logica, regels naar de meer praktische kant.

Schematisch stappenplan:

argumentatieve tekst
→ redeneerschema (nog concreet, nl. oppervlakte-structuur van een redenering)
→ redeneervorm (abstracte dieptestructuur)
    ←→ redeneervorm in systeem X, logische regel die geldt
        → corresponderende logische wet: een uitspraak die noodzakelijk waar is

De dubbele pijl wijst erop dat het het systeem is die de redeneervorm bepaalt.

1.4 Redeneervormen als (re)constructies

Bij het toekennen van een redeneervorm is de actieve inbreng van de interpreterende nog groter dan bij het opstellen van een redeneerschema. Er moet gekozen worden welke onderdelen van de tekst logisch relevant en irrelevant zijn (1), hoe de redeneervorm wordt opgesteld en binnen welk logisch systeem (2). Daarbij moeten de gegevens soms zelfs creatief aangevuld worden (3). De interpretatie is dus niet slechts een reconstructie van wat oorspronkelijk reeds aanwezig was, maar ook een creatieve constructie van aanvullende gegevens. De genoemde problemen zullen in omgekeerde richting behandeld worden.

(3) Een enthymeem is een redenering met een verzwegen premisse of conclusie en dus vanuit logisch standpunt onvolledig. In het gewone taalgebruik zijn ze meer regel dan uitzondering. De weglating is niet altijd bewust, en soms wordt het weggelaten deel ook overgeslagen uit zekere achting voor de andere. Soms is het gebruik retorisch: door een premisse weg te laten kan ze bijvoorbeeld gesloten worden voor kritiek. In de syllogistiek spreekt men van een enthymeem van de eerste, tweede of derde orde naargelang de eerste, tweede of derde regel van het syllogisme verzwegen wordt. Voor het laatste geval gebruikt men ook de term “innuendo”, waarbij men de gesprekspartner zelf de conclusie laat trekken en deze dus makkelijker aanvaardt.

(2) Het probleem van de systeemkeuze ontstaat wanneer meerdere logische systemen geschikt lijken een uitspraak te beoordelen, terwijl ze tot een verschillend verdict komen. Er is dan aan hetzelfde redeneerschema een verschillende redeneervorm toegekend. Dit kan echter ook met de vooronderstellingen van de systemen te maken hebben. Zo zijn twee belangrijke vooronderstellingen van de syllogistiek dat er niet met lege klassen (niet-bestaande entiteiten) en niet met collectieve termen gewerkt wordt. Ter illustratie kijken we naar de volgende voorbeelden, die in de syllogistiek niet werken:

alle draken spugen vuur
alle draken zijn dieren → ‘draken’ is een lege klasse
---
sommige dieren spugen vuur

en

wat zeldzaam is, is duur
een goedkoop paard is zeldzaam → ‘goedkoop paard’ zegt niets over een indiv. paard
---
een goedkoop paard is duur

N.B.: “alle”-quantor draagt geen bestaansveronderstelling in zich; “sommige”-quantor draagt wel een bestaansveronderstelling in zich.

De predicatenlogica werkt wel met lege klassen, wat één van de redenen is dat ze als meer verfijnd of exact wordt beschouwd. Samenvattend: het begrip ‘geldigheid’ is niet systeem-gebonden, maar de geldigheidsbeoordeling wel.

(1) In de behandeling van het probleem van de relevantie wordt vooral gesproken over de redeneervorm waarin relaties in een meer abstracte vorm gegoten worden. Belangrijk hier is dat er meerdere soorten relaties zijn, en dus is het nodig om te specifiëren over wat soort relatie het gaat (bijvoorbeeld een transitieve relatie die kan worden afgekort met R_T). Dit druist misschien in tegen het de logicus eigen streven naar algemeenheid, maar is wel relevant om de geldigheid van een redenering te kunnen beoordelen. De transitiviteit van de relaties kan in een extra premissen weergegeven worden (met als nadeel dat iedere redenering geldig kan worden met een onware extra premisse). Dit laat zien dat het onderscheid tussen vorm en inhoud niet altijd scherp is.

Conclusie is dat men nooit van *de* logische vorm van een redenering kan spreken. Logische systemen *construeren* vormen voor geldigheid. En de vormen worden bepaald door de bijdrage die de uitspraken aan de geldigheid van de constructen kunnen leveren.

Oefeningen: zie powerpoint en laatste deel boek.

Hoofdstuk 2 – Redelijke interpretatie

2.1 Het samenwerkingsbeginsel van Grice

Naast inhoud en vorm is er nog de strekking: taalgebruik kan in plaats van bewerend bijvoorbeeld ook directief zijn. Er zijn dus drie soorten interpretaties: van inhoud, van vorm en van strekking.

“inhoudelijke interpretatie” slaat op het geven van inhoud aan iemands gesproken of geschreven woorden, volgens aanwijzingen in die tekst, rekening houdend zowel met de talige co-tekst als met de buitentalige context. Men kan in dit geval ook spreken van het toekennen van een propositie aan een zin; Freke spreekt hier van ‘*gedanke*’. De interpretatie moet altijd redelijk zijn, maar wat juist redelijk is, is niet zo makkelijk te omschrijven. Naess (1978) stelt voor: *een veelvoorkomende interpretatie*, maar die kan soms zeer onredelijk zijn. *Een voor de hand liggende interpretatie* kan daarom beter zijn, een definitie die wijst op de flexibiliteit van de redelijke interpretatie. Men kan zeggen dat een redelijke interpretatie beheerst wordt door een soort “logica van de conversatie”.

Grice (1989) heeft deze “logica” enigszins verduidelijkt, in een theorie die een belangrijke hulp is om in een tekst het geïmpliceerde naar boven te halen. Grice’s uitgangspunt is dat een gesprek een redelijke onderneming is, en dus niet bestaat uit onsamenhangende opmerkingen. Onze gesprekken zijn een vorm van samenwerking, waarbij de betrokken partijen gemeenschappelijke doeleinden ziet, of minstens een wederzijds aanvaarde richting van het gesprek. Doel en richting kunnen meer of minder duidelijk zijn, en vroeger of later in het gesprek gestalte krijgen. Op basis van dit idee formuleert Grice zijn “coöperatiebeginsel” dat zegt dat deelnemers aan een gesprek moeten zorgen dat zijn bijdrage zó is als, gegeven het moment waarop men zijn bijdrage aan het gesprek levert, vereist wordt door het aanvaarde doel (of de aanvaarde richting) van het gesprek. Grice formuleert eveneens vier stelregels voor de conversatie, volgens welke de bijdragen aan een gesprek moeten zijn:

1. zo informatief als vereist is door de gesprekssituatie → kwantiteit

2. waarheidsgetrouw → kwaliteit
3. relevant → relatie
4. zo duidelijk als redelijkerwijze mogelijk → modaliteit

Zoals de pijltjes aangeven, benoemd Grice deze regels met namen die Kant aan zijn categorieën gaf. In deze context can "redelijke interpretatie" gedefinieerd worden als de interpretatie die recht doet aan de ander als partner in een gesprek dat in de boven omschreven zin een redelijke onderneming is.

2.4 Soorten taalgebruik en de notie 'geldigheid'

In de formele logica wordt de geldigheid van een redenering uitsluitend door haar structuur bepaald. Ze abstraheert daarmee van allerlei zaken als personen, plaats, tijd, omstandigheden die wel van belang zijn in de retoriek en dialectiek, waarin het meer om overtuigen draait. In het algemeen geldt dat het verschil in oriëntatie tussen formele logica en gewoon taalgebruik veel interpretatieverschillen teweegbrengt, bijvoorbeeld in 'sommige mensen zijn gelukkig' (in het gewone taalgebruik impliceert 'sommige' 'niet alle'; in de formele logica niet en zou dit zelfs tot contradictie leiden in Aristoteles' logisch vierkant) of 'ik handelde en dacht na' (in de gewone taal is de volgorde van de zinnen van belang, in de formele logica niet).

Semiotiek, studie van tekens en tekenprocessen, bestaat uit drie aandachtsvelden:

1. Syntax / syntactiek: relatie van tekens onderling. Gaat over zinnen: vorm.
2. Semantiek: relatie tussen tekens en dat waar ze naar verwijzen. Gaat over propositie en verwijzing: inhoud.
3. Pragmatiek: relatie tussen tekens en tekengebruikers. Gaat over taaldaden: strekking.

In de interpretatie onderscheiden we drie corresponderende soorten:

1. interpretatie van de vorm ~ syntax, formele logica, logische systemen
2. interpretatie van de inhoud ~ semantiek
3. interpretatie van de strekking ~ pragmatiek, argumentatieleer, de rol van uitingen in communicatie

Syntactiek en semantiek zijn abstracties uit de pragmatiek, al vooronderstelt de pragmatiek hen wel. Formele logica gaat over syntactiek en semantiek.

De rol van uitingen in communicatie geeft het soort taalgebruik aan. In de logica beperkt men zich niet langer tot informatieve, bewerende zinnen; met de opkomst van de taaldadentheorie van Austin (1962) en Searle (1969) kreeg men aandacht voor meer vormen van taalgebruik en werd de hegemonie van het bewerend taalgebruik althans pragmatisch doorbroken.

Een taaldaad kan beschouwd worden als de kleinste eenheid van communicatie. Aan een taaldaad kunnen drie aspecten onderscheiden worden:

- het locutionaire: de inhoud, dat wat iemand zegt en impliceert → semantiek
- het illocutionaire: de strekking, de propositionele houding & reflexieve intentie van de spreker
- het perlocutionaire: het niet-conventionele effect op de toehoorders
  N.B.: strikt genomen is het perlocutionaire geen onderdeel van de taaldaad, gezien de spreker het effect niet in zijn macht heeft. Het verschil tussen bewijzen en overtuigen kan dus ook beschouwd worden als een tussen illocutie en perlocutie.

Taalgebruik wordt nu gezien als het illocutionaire aspect van een taaldaad. De propositionele attitude (PA) is de houding die de spreker aanneemt tgov. de bewering (bv. de bewering geloven, willen beoordelen...). De reflexieve intentie (RI) is het geheel waarvan de spreker de toehoorder op de hoogte wil brengen. Om het illocutionaire van het locutionaire te onderscheiden, gebruiken we aparte symbolen: de illocutionaire kracht *F* en inhoud *F(p)* kunnen aan de hand van functoren of operatoren weergegeven worden, bijvoorbeeld ⍰ voor de beweringskracht, ! voor een bevel en ? voor een vraag. In de interpretatie van de strekking wordt bepaald welk soort taalgebruik van toepassing is. De meest voorkomende zijn:

⍰*p*	Informatief taalgebruik (beschrijvend, bewerend)	PA: geloven, menen	Feiten meedelen
!*p*	Directief taalgebruik (beïnvloedend)	PA: willen, wensen	Bevelen, stipulatieve definitie
!!p of Gp	Expressief taalgebruik	PA: p voelen, het gevoel uitdrukken dat p	Spontane uitroepen
Vp	Verbintenissen	PA: de intentie hebben p te doen of laten	Beloften, bedreigingen
Dp	Institutioneel taalgebruik (declaratief)	PA: met bevoegdheid aangeven dat p	Ceremoniële uitspraken
Ep	Evaluerend taalgebruik	PA: p beoordelen (volgens een norm)	

N.B.: mengvormen kunnen zeker voorkomen; men classificeert ze dan volgens de belangrijkste. In het bijzonder is de grens tussen Gp en Dp vrij vaag bij taaldaden van feliciteren, excuseren en dergelijke, waar de taaldaad soms meer te wijten kan zijn aan de sociale verwachting dan aan een authentiek gevoel.

Hare (1964) paste Austin's taaldadentheorie toe op het redeneren in het domein van bevelen of voorschriften. Hare's strategie is het inhoudselement (het locutionaire) los te koppelen van het illocutionaire, en daarmee geldige redeneringen in de ethiek mogelijk te maken. De logische relaties tussen de inhouden worden niet teniet gedaan door de illocutionaire operator van het ethische (hier: directief). Zoals de modus ponens werkt in het bewerend taalgebruik, door de relaties tussen p en q in deze structuur, zo kan hij ook in het prescriptieve gelden: de structuur blijft immers dezelfde. In zo'n redenering is de eerste premisse vaak een ethisch principe, de tweede een vaststelling van een feit. De conclusie is dan weer normatief.

! (als A dan niet B)
⍰ A

! niet B

Dit verbreedt wel de definitie van geldigheid, omdat de conclusie, een norm, niet zozeer *waar* is als wel *geldig.* (Geldigheid werd aanvankelijk gedefinieerd als "als de premissen waar zijn, dan is noodzakelijk ook de conclusie waar.) Het blijft in ieder geval om een kwaliteit gaan die noodzakelijk overgaat van premissen naar conclusie. Er is ook geprobeerd propositionele houdingen in de logische analyse in te voeren, die gelinkt zouden worden aan het oude begrip 'modus'. Probleem van deze

deontische logica is echter dat ze een logica van handelingen en dus van verandering impliceert, terwijl we in de logica juist steeds van een statische wereld uitgaan.

Oefeningen: powerpoint + handboek.

Hoofdstuk 3 - Drogredenen

3.1 De context

Drogredenen zijn moeilijk te definiëren, alsook de morele beoordeling. Volgens Aristoteles is een drogreden of sofisme een eristische redenering, i.e. een gebruik van dialectiek zonder zoektocht naar waarheid, puur met het oog op het winnen van een dispuut. Zeno van Elea (uitvinder van de paradox van Achilles en de schildpad) zou de stichter zijn van deze "kunst van het dialogeren". De dialectiek bij Aristoteles was een systematisering van Socrates' methode om, enerzijds, door goed gerichte vragen de gesprekspartner tot tegenspraak met zijn beginstelling te brengen, of, anderzijds, een soort inductie tot een algemeen level te bereiken - om zo op zoek te gaan naar de waarheid. De Sofisten daarentegen, rondtrekkende geleerden, lieten de waarheid los om vooral te focussen op de dialectische middeltjes, en waren dus meestal relativisten in de ethiek. De dialectiek werd een techniek om een dispuut ('eris') te winnen - vandaar de naam eristiek.

De eristiek is dus de kunst van het listig dispuut of strijdgesprek, meer precies het onderricht daarin. De gesprekspartner - of tegenstander - verslaan, eventueel met oneerlijke middelen - wordt dan belangrijker dan het zoeken naar de waarheid. De fairness en redelijkheid waarvan sprake bij Grice is dus ver zoek. Binnen de eristiek maakt Aristoteles een onderscheid tussen drogredenen en zogenaamde wenken voor het winnen van een dispuut. Argumentatief gezien zouden drogredenen, zulke trucjes en leugens op één lijn geplaatst kunnen worden, omdat het dan geen verschil maakt of de misleiding bewust of onbewust gebeurd. Moreel gezien is er natuurlijk wel een verschil. Juist omdat drogredenen ook onbewust gebruikt kunnen worden, is het voor Aristoteles belangrijk om er kennis van te hebben, zodat men er - in zichzelf redenerend - niet het slachtoffer van wordt. In dat geval spreekt men van "paralogismen".

In de zoektocht naar een definitie voor drogredenen maakte Aristoteles een onderscheid tussen drogredenen die concluderen en zulke die het slechts schijnen te doen. Het belangrijkst lijkt hij te vinden dat ze uitgaan van premissen die aannemelijk lijken, maar het in feite niet zijn. Een drogreden kan dus een ongeldige redenering zijn, maar het hoeft niet. Om beter inzicht in drogredenen te krijgen, wordt er nu een klassieke opsomming gegeven. Hierbij wordt een onderscheid gemaakt tussen drogredenen *in dictionem* die afhankelijk zijn van de formulering; en drogredenen *extra dictionem* die onafhankelijk zijn van de formulering.

3.2 Drogredenen afhankelijk van de formulering

	strekking (1)		
interpretatie	inhoud	meerzinnigheid (2)	
		foutieve suppositie (3)	compositie divisie eenzijdige analogie
	vorm	pragmatisch: accent (4)	
		syntactisch-semantisch	amfibolie (5) de vorm van een uitdrukking (6)

1. Drogreden van de strekking: de onduidelijkheid van de illocutionaire kracht maakt dat men tot de verkeerde conclusie kan komen. Bv: “Het is elf uur” - “dat weet ik” ; eufemismen ; het idee dat over smaak niet te twisten valt (waarbij evaluatief taalgebruik met expressief taalgebruik wordt verward)
2. Meerzinnigheid: een of meer woorden worden gebruikt in meer dan één van hun betekenissen. Gevaar is groter wanneer de betekenissen elkaar overlappen of in elkaars verlengde liggen. Bv: “onkerkelijk”.
3. Foutieve suppositie: kan verschillende vormen aannemen.
    a. Enerzijds is er de verwarring van taal en metataal, bv: “ik lieg altijd”. Specifieker worden de drogredenen van “compositie” en “divisie” bedoeld. Een term is collectief gebruikt als hij slaat op een groep of klas als geheel; distributief als hij van elk lid afzonderlijk geldt. Bij een ongeoorloofde overgang van geheel naar deel spreekt men van divisie; bij het omgekeerde van compositie. Bv: “Honden komen veel voor; Japanse spaniëls zijn honden, dus JS komen veel voor.”
    b. Anderzijds is er het eenzijdig gebruik van een analogie. Bv: vergelijking Brussel - hart naar aanleiding van een discussie over de aansluiting van de E5 op de kleine ring.
4. Accent: de betekenis van een uitspraak kan wijzigen naargelang de plaats van het accent. Bv: “een uitstekende spijker”, “u zult geen vals getuigenis afleggen tegen uw naaste”.
5. Amfibolie: een syntactisch-semantische ambiguïteit waarbij de dubbele betekenis voortkomt uit de combinatie van woorden die op zich geen dubbele betekenis hoeven te hebben. Bv: “sinds de dood van mijn man twee jaar geleden, heb ik niet meer zo gelachen.”
6. Misleiding door grammaticale vorm / “de vorm van de uitdrukking”: wat niet hetzelfde is, wordt toch in dezelfde vorm uitgedrukt. Dit zijn fouten tegen de notionele definitie van een grammaticale categorie dat men een substantief voor een ding laat staan, een werkwoord voor een handeling, en een adjectief voor een eigenschap. Hoewel deze definitie linguistisch onbruikbaar is, bewijst ze toch haar nut in het gebied van de drogredenen om ons te hoeden voor uitspraken als “de wil van het volk” of “plicht gebiedt mij”, of ook “het vonnis der geschiedenis”.

3.3 Drogredenen onafhankelijk van de formulering

1. Onterechte particularisatie of -generalisatie:
    a. onterechte particularisatie / drogreden van de bijkomstigheid: toepassing van een algemene regel op een bijzonder geval, waar dit vanwege een bijkomende omstandigheid niet geoorloofd is. Bv: (spreker onder een open raam met koude wind) “het is hier koud” - “dat kan niet, want de verwarming staat op”.
    b. overhaaste generalisatie: omgekeerde regel. Bv: verbod op verkoop van alcohol omdat schadelijk voor sommigen. Onterechte generalisatie kan voeren tot het inductie-probleem. Het is niet altijd volledig duidelijk wanneer de generalisatie terecht of onterecht is.
    N.B.: het verschil tussen “divisie” en “onterechte particularisatie” is dat in het eerste geval de term op twee verschillende manieren wordt gebruikt (collectief → distributief), terwijl in het tweede geval men binnen het distributieve woordgebruik blijft. Hetzelfde geldt voor de omkering.
2. Irrelevantie (*ignorantio elenchi*): verzamelrubriek voor gevallen die niet elders onder te brengen zijn.
    a. *argumentum ad hominem*: argumentatie tegen de persoon ipv tegen de zaak of stelling die die persoon verdedigt.

   b. *argumentum ad verecundiam*: misplaatst beroep op gezag of autoriteit.
   c. *argumentum ad ignorantiam*: een uitspraak wordt als waar aangenomen omdat het tegendeel niet bewezen is.
   d. *argumentum ad baculum*: argument van de stok, een conclusie wordt opgedrongen onder dwang of bedreiging. N.B.: het kan wel gepast en fair zijn om bij een deliberatie te wijzen op ongewenste gevolgen van een bepaalde beslissing.
   e. *argumentum ad misericordiam*: misplaatst beroep op medelijden.
   f. *argumentum ad populum*: demagogie, irrelevant beroep op de hartstocht van het publiek.
3. Dialogale drogredenen
   a. *petitio principii*: "begging the question", het te bewijzen als bewezen aannemen, cirkelredenering. Ruimer kan men zeggen dat iemand een uitspraak aannemelijk probeert te maken door haar af te leiden uit een premisse die even problematisch of zelfs problematischer is dan de te rechtvaardigen uitspraak. Bv: "de Koran is onfeilbaar want geschreven door Mohammed, die Gods profeet was (want dat staat in de Koran)".
   b. *many questions*: de complexe vraag, in een vraag ligt een andere vraag verstopt; iets wordt als gedeelde kennis behandeld wat het in feite niet was. Bv: "wanneer ben je opgehouden je vrouw te slaan?"
4. *Non causa pro causa*: een causaal verband wordt afgeleid uit het nauw samen voorkomen van twee verschijnselen.

3.4 Naar een definitie van de drogreden

Volgens het klassieke lijstje kunnen we drogredenen definiëren als een min of meer omlijnde groep van zetten in een discussie, die wel succes kunnen hebben, maar die niet geoorloofd zijn, omdat ze niet fair zijn tegenover de partner en/of omdat ze af kunnen leiden van het doel van de discussie, namelijk een juist theoretisch of praktisch inzicht. Als zodanig horen ongeldige redeneringen nog niet tot deze omlijnde groep: ze moeten een zekere verleidelijkheid hebben die in voor een dialoog relevante termen beschreven kan worden.

Oefeningen: powerpoint en boek.

Hoofdstuk 4 – De syllogistiek

4.1 Waarom syllogistiek?

Alleen in een logisch systeem kan geldigheid beoordeelt worden, en in de formele logica bepaalt de vorm of structuur die geldigheid. Syllogistiek is zo'n formeel systeem, maar nog geen symbolische logica: het evalueert geldigheid a.d.h.v. de vorm, maar behoudt een mate van taligheid. Ondanks beperkingen en omvattendheid van nieuwe (symbolische) systemen, gebruiken we het hier als pedagogische tussenstap.

In de syllogistiek worden termen vervangen door variabelen: uitdrukkingen die geen vaste betekenis hebben, maar die een plaats aanduiden waar een constante kan worden ingevoerd. Een constante is een uitdrukking die geacht wordt een bepaalde betekenis te hebben (in een gegeven systeem). Aristoteles' variabelen zijn termvariabelen, wat drie beperkingen met zich meebrengt:

1. Categoriale beperking: termvariabelen zijn parkeerplaatsen voor uitdrukkingen die als onderwerp of naamwoordelijk deel van het gezegde kunnen fungeren. Enkel een subject-predicaat structuur is dus mogelijk.
2. De termen die men voor de letters invult, mogen niet leeg zijn (draken en zo). Zo kan men (>< predicatenlogica) uit “alle mensen zijn sterfelijk” besluiten tot “sommige mensen zijn sterfelijk”.
3. Termen mogen niet collectief gebruikt zijn, alleen distributief - en dus van afzonderlijke individuen gelden.

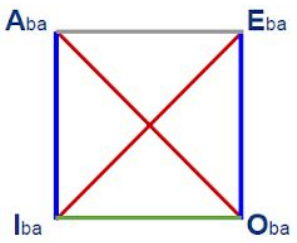
Aristoteles formaliseert slechts in bepaalde mate. Er zijn maar 24 geldige syllogismen. Syllogistiek kan eenvoudig opgenomen worden in complexere predicatenlogica, alleen valt de geldigheid dan soms anders uit. Om historische en didactische redenen wordt de syllogistiek toch eerst apart behandeld.

4.2 Categorische uitspraken: het logisch vierkant en conversie

De bouwsteen van de syllogistiek is de categorische uitspraak: zinnen die een predicaat (P) bevestigen of ontkennen van een subject (S). Hieruit volgt de standaardvorm die bestaat uit twee termen die door werkwoord ‘zijn’ gekoppeld worden (‘zijn’ is dus het koppelwerkwoord of *copula*). Op basis van kwaliteit en kwantiteit zijn er vier soorten S-P uitspraken (klinkers komen van ‘affirmo en nego’). Kwaliteit gaat over het affirmatief of negatief zijn van de copula; kwantiteit gaat over het universeel of particulier zijn van de uitspraak.

1. A*ba* (universeel bevestigend) N.B.: ook singuliere uitspraken zoals ‘Socrates is wijs’
2. I*ba* (particulier bevestigend)
3. E*ba* (universeel ontkennend)
4. O*ba* (particulier ontkennend)

De relaties tussen deze vier mogelijkheden worden aangegeven in het “(traditionele) vierkant van oppositie” of “logisch vierkant”, waar de vier punten verbonden worden door zes lijnen. De lijnen staan voor vormen van *oppositie,* het in kwaliteit en/of kwantiteit verschillen van de uitspraken die hetzelfde subject en predicaat hebben. Er zijn vier vormen van oppositie:



1. Contradictie: verschil in kwaliteit *en* kwantiteit. Altijd één waar en één onwaar.
2. Contrariteit: universele uitspraken die in kwaliteit verschillen. Uitspraken kunnen niet beide waar zijn, wel beide onwaar. Slechts uit bevestiging van één kan dus ontkenning van ander worden afgeleid.
3. Subcontrariteit: particuliere zinnen die in kwaliteit verschillen. Kunnen beide waar zijn, maar nooit beide onwaar. Uit ontkenning van één volgt dus bevestiging van ander. Immers, als Iba ontkent wordt, wordt Eba bevestigd (contrariteit), Aba ontkend (contradictie), en dus Oba bevestigd.
4. Subalterniteit: slechts verschil in kwantiteit. Wordt de universele zin bevestigd, dan ook de particuliere zin. Wordt particuliere zin ontkend, dan ook de universele zin (“truth goes down, falsity goes up”).

N.B.: “sommige” wordt niet conversationeel opgevat, maar strikt logisch. Dat wil zeggen dat “sommige zijn...” niet mag worden opgevat als “sommige zijn niet...”.

De vier categorische proposities zijn uitspraak-vormen. Om de operaties van het logisch vierkant makkelijk te kunnen uitvoeren, en om zekerder te zijn dat er geen lege klassen worden gebruikt,

worden zinnen hervormd tot ze een duidelijke S-P structuur hebben, o.a. door toevoeging van een "quantor". Bv: "koeien hebben een staart" wordt "alle koeien zijn dieren die een staart hebben" ; "alles is in orde wat goed afloopt" wordt "alle goed aflopende gebeurtenissen zijn gebeurtenissen die in orde zijn".

Termen hebben extensie (denotatie, omvang, klasse van individuen die er onder vallen) en intensie (connotatie, semantische lading). Intensie is het geheel van semantische trekken, meestal als de definiërende trekken gezien, zoals "vrouw die één of meer kinderen heeft" bij 'moeder'. De extensie is de relatie van een term tot wat eronder valt: in dit geval alle individuen die moeder zijn. De intensie bepaalt dus de extensie; en toename van intensie (grotere specificering) betekent afname van extensie.

Termen hebben altijd een bepaalde distributie. De distributie van een term in een zin geeft aan in welke mate er naar de extensie wordt verwezen: een gedistribueerde term verwijst naar zijn hele extensie, een ongedistribueerde niet. Zowel S als P kunnen (on)gedistribueerd zijn. In *Alle Grieken zijn mens* is het subject 'Griek' gedistribueerd, maar het predicaat 'mens' niet (er zijn ook mensen die niet-Griek zijn). In *Sommige studenten zijn niet rijk* is het subject 'studenten' niet gedistribueerd, maar het predicaat weer wel. Vuistregel:

- S-term (kijk naar de quantor)
    - gedistribueerd in universele zinnen
    - ongedistribueerd in particuliere zinnen
- P-term
    - gedistribueerd in negatieve zinnen
    - ongedistribueerd in affirmatieve zinnen
      N.B.: de P-term is WEL gedistribueerd in affirmatieve zinnen wanneer het gaat om een definitie, of wanneer ze volledig binnen de extensie van de S-term ligt (wat eigenlijk op hetzelfde neerkomt). Bv: "alle moeders zijn vrouwen die één of meer kinderen hebben," of "sommige mensen zijn studenten".

4.3 Geldige syllogismen

Een syllogisme heeft een zeer bepaalde structuur:

1. Bestaat slechts uit categorische uitspraken in standaardvorm (A, E, I of O), waarvan twee premissen en één conclusie.
2. Er treden drie verschillende termen op (elke uitspraak bevat er twee): middenterm, major-term (predicaat van de conclusie, *a*) en minor-term (subject van de conclusie, *b*).
3. De standaardvorm heeft een vaste ordening: Major (premisse met major-term), Minor (premisse met minor-term) en conclusie.
4. Met deze ordening behoort elk syllogisme tot een bepaalde figuur en daarbinnen tot een bepaalde modus, die samen het syllogisme beschrijven.

Figuur wordt bepaald door de plaats van de middenterm in de premissen (4 opties). De nummering van de figuren ligt vast en is te kennen.

1:	ma	2:	am	3:	ma	4:	am
	bm		bm		mb		mb
	---		---		---		---
	ba		ba		ba		ba

Modus wordt bepaald door de kwaliteit en kwantiteit van iedere uitspraak (Major - Minor - conclusie), weergegeven met de letter van het logisch vierkant, zodat een mogelijk syllogisme eruit komt te zien als AII-3. Op basis van deze code, die dus figuur en modus omvat, kan de geldigheid van een syllogisme worden beoordeeld.

Aan de hand van de 4 figuren en 64 modi, kunnen we berekenen dat er 256 mogelijke syllogistische vormen zijn. Daarvan zijn er 24 geldig, waarvan hun geldigheid bewezen kan worden aan de hand van de regels van het syllogisme. Sommige vanzelfsprekende regels zijn niet in het onderstaande rijtje opgenomen, al is het wel de moeite om te benadrukken dat er maar drie verschillende termen mogen zijn. Meerzinnigheid van de middenterm moet dus vermeden worden (cf. drogredenen).

Traditionele regels van syllogisme:

<u>DISTRIBUTIE</u>

1. *m* dient in ten minste één premisse gedistribueerd te zijn, anders is haar verbindende functie niet gegarandeerd.
2. Een term die niet gedistribueerd is in de premissen, mag dat ook niet in de conclusie zijn, anders zou de conclusie over *meer* gaan dan in de premissen gegeven is).

<u>KWALITEIT</u>

3. Ten minste één premisse dient affirmatief te zijn. Zoniet worden major en minor slechts van m gescheiden, maar weten we nog niets over hun onderlinge relatie.
4. Is er een negatieve premisse, dan moet de conclusie ook negatief zijn.
5. Zijn beide premissen affirmatief, dan ook de conclusie.

<u>KWANTITEIT</u>

6. Uit twee particuliere premissen volgt niets.
7. Is één van de premissen particulier, dan ook de conclusie.

Er zijn uiteindelijk 24 geldige syllogismen, waaronder Barbara, Celarent, Darii en Ferio. De grond van hun evidentie ligt in hun structuur, omdat de minor extensioneel vervat is in de middenterm en deze weer in de major. In andere woorden: wat universeel wordt gezegd van een subject, wordt gezegd van al wat daaronder valt.

4.4 Syllogistiek en dagelijks taalgebruik

Syllogismen zijn middellijke, maar enkelvoudige redeneringen. Ze kunnen op twee wijzen aan elkaar gekoppeld worden tot complexe redeneringen:

1. *Polysyllogisme*: een reeks syllogismen, waarbij de conclusie van het voorafgaande als premisse van het volgende syllogisme dient. Syllogismen moeten uiteraard apart op geldigheid worden gecontroleerd.
2. *Sorites* of kettingredenering: een verkorte (enthymematische) vorm van polysyllogisme. Het predicaat van de vorige uitspraak wordt steeds het subject van de volgende; en in de conclusie wordt het subject van de eerste uitspraak aan het predicaat van de laatste verbonden.

Een handreiking of *epicheirema* houdt in dat er gronden worden aangereikt voor premissen binnen het syllogisme. Het eigenlijke syllogisme en het enthymematisch bewijs voor een premisse moeten goed uit elkaar worden gehouden om het epicheirema van een polysyllogisme te onderscheiden.

Soms heeft een uitspraak een aanpassing nodig om tot standaardvorm te worden, dus wordt er een *parameter* ingevoerd. Zo zijn er bijvoorbeeld parameters van plaats of van tijd. Eerder werd al gewezen op het invoeren van quantoren om de standaardvorm te verkrijgen, wat vaak al kan volstaan.
Een probleem apart zijn de exclusieve zinnen, waarin het predicaat exclusief, dus anderen uitsluitend, wordt toegekend aan een subject, dat dus het uitsluitend subject is. Om de standaardvorm te verkrijgen, keert men zulke zinnen om. Bv: "alleen burgers hebben stemrecht" wordt "alle stemgerechtigden zijn burgers" ; "niemand was dapper, behalve de mariniers" wordt "alle dapperen waren mariniers". Singuliere exclusieve zinnen zijn iets specialer, omdat dat te ongrammaticaal kan worden bij omkering. Deze kunnen dan best worden opgesplitst in twee zinnen. Bv: "Alleen Piet is geslaagd" wordt dan niet "alle geslaagden zijn Piet" maar wordt gesplitst in "Piet is geslaagd" en "geen kandidaat die niet Piet is, is geslaagd".
Nog een geval apart zijn exceptieve zinnen, die ook uitsluiten, maar waar in exclusieve zinnen het predicaat gold van de uitzondering, geldt hier het predicaat juist niet van de uitzondering. Deze zinnen bevatten ook een verborgen conjunctie (zoals bij de singuliere exclusieve zinnen), die men dus uit elkaar moet halen (en als het om een syllogisme gaat, moeten er dus twee syllogismen van gemaakt en gecontroleerd worden). Bv: "iedereen, behalve buitenlanders, is verkiesbaar" wordt gesplitst in "alle niet-buitenlanders (of burgers) zijn verkiesbaar" en "geen buitenlander is verkiesbaar".

Als men aan de geldigheid twijfelt, moet eerst een redeneerschema opgesteld worden en vervolgens worden gecheckt of er wel sprake is van een syllogisme. Daarna kan men de regels nagaan, het rijtje van 24 checken, of een tegenvoorbeeld zien te vinden.

Oefeningen: powerpoint & boek.

DEEL II - SYMBOLISCHE LOGICA

Hoofdstuk 5 – Propositielogica

5.1 Technische termen, het nut van formaliseren

Om de geldigheid van een redenering te evalueren, bekijken we er de reneneervorm van binnen een logisch systeem. Het systeem van de syllogistiek gebruikt als vorm categorische uitspraken met termvariabelen (major-, minor- en middenterm). Het systeem van de propositielogica is daarentegen gebaseerd op zinsvariabelen. Kort gezegd is propositielogica de logica van de propositionele functies. Hierbij worden de zinnen als blokken behandeld en de betrekkingen tussen twee uitspraken bestudeerd, of het effect van de negatie op een uitspraak als geheel. Er is dus een analyse van de externe / onderlinge structuur ipv de interne structuur.

Enkele termen:

Functie	Uitdrukking die één of meer variabelen bevat. (f (p,q) = p V q)
Uitdrukking	Grafisch teken of groep van grafische tekens (hoi)
Variabele	Uitdrukking zonder vastgelegde betekenis, duidt de plaats aan waar een constante kan worden ingevoerd (*p, q, r)*.
Constante	Uitdrukking die een bepaalde betekenis heeft (A, B, C). Met een "dictionaire" kan men zeggen dat bv. A = het regent.
Uitspraak (of zin)	Uitdrukking die (in een gegeven systeem) afzonderlijk geponeerd (geaffirmeerd of ontkent) kan worden. (het regent)

Propositionele functie	Uitdrukking die een zin wordt zodra haar variabelen op correcte wijze door constanten vervangen zijn. Op correcte wijze wil zeggen: conform de syntactische categorie van de variabele. (f (p,q) = p V q, p = het regent, q = het hagelt). Anders gezegd: functie waarbij de variabelen proposities zijn.
Syntactische categorie	Klas van uitdrukkingen die in gegeven taal die onderling vervangbaar zijn in een zinvolle uitdrukking, zonder dat deze uitdrukking daardoor ophoudt zinvol te zijn. N.B.: zinvol is niet per se waar of juist. (zelfstandig naamwoorden)
Argument	Een zinvariabele (voorbeeld: het regent) ; wordt bepaald door een functor.
Functor (of operator)	Grafisch teken / uitdrukking dat dient om een andere uitdrukking te bepalen / dat de waarde van een uitdrukking mede beslist. Naar het aantal argumenten is er sprake van een n-plaatsige functor. (disjunctie)
Waarde	Waarheid (1) of onwaarheid (0) van een uitspraak.
Waarheidsfunctor	Zinbepalende functor van dien aard, dat de waarde van een uitdrukking (door hem en zijn argumenten gevormd) slechts afhangt van de waarde van zijn argumenten, dus niet van hun betekenis. Ofwel: een functor die je gebruikt bij waarheidsfuncties, en niet bij getallen. Ofwel: waarheidscompositionele functor waarbij de output van het geheel slechts afhangt van de waarden van de input en de werking van de functor. (voorbeeld: negatie)
Waarheidsfunctie	Functie die bestaat uit één of meer waarheidsfunctoren met bijbehorende argumenten. Ofwel: functie die om waarheid draait, en niet om getallen. Ofwel: een functie waarvan de functoren n-plaatsige waarheidsfunctoren zijn, met als input en output waarheidswaarden.

N.B.: elke propositie <u>is</u> zijn waarheidswaarde: 1 of 0 .

De propositielogica is het meest fundamentele systeem: de wetten die hier gelden zijn eenvoudiger dan en gelden eveneens in de andere systemen van symbolische logica (die voegen er eigen wetten aan toe). Er is een structuurovereenkomst die tot uiting komt in de formalisering.

In formalisering worden tekens ("symbolen") los van hun betekenis gebruikt, waardoor we op louter syntactisch vlak met een taal kunnen opereren. In het rekenen werken we met een geformaliseerde taal van het tekensysteem van de cijfers; in de propositielogica dus met een geformaliseerde taal van ongeanalyseerde zinnen.

Twee eisen aan geformaliseerde taal:

1. Vormingsregels: bepalen de *Well Formed Formulae* (WFF), i.e. de (combinaties) van tekens die syntactisch zinvol zijn. Vormingsregels zijn gebaseerd op een lexicon: een lijst van primitieven / basistermen.
2. Afleidingsregels: bepalen welke uitspraken (theorema's = afgeleide stellingen) waar zijn gegeven de waarheid van andere uitspraken. Afleidingsregels zijn gebaseerd op axioma's: zinnen die waar zijn zonder bewezen te zijn. Ze zijn ook waarheidsbehoudend: laten niet toe uit een ware uitdrukking iets onwaars af te leiden.

De regels laten ons toe zonder talige ambiguïteit de geldigheid van een uitdrukking na te gaan. Ze werken puur syntactisch (i.e. op de vorm), maar behouden toch een zekere semantiek: de betekenis

die we er aan toekennen (i.e. 'geldigheidstools'). Zo kan logica gebruikt worden om over een ander systeem (bijv. wiskunde) te spreken, als metataal tegenover een objecttaal. Ook logica zelf kan echter ook tot onderzoeksobject worden in een axiomatische benadering.

Axiomatisering geeft onder meer een beter inzicht in de begripsvorming en structuur van een wetenschap (nl. wat is afgeleid VS. wat zijn de uitgangspunten). Zo wordt het empirisch fundament van een systeem bloot gelegd en kan men voor de diverse uitspraken hun graad van zekerheid aangeven. Bij een sterk systeem zijn er veel axioma's en deductieregels (men kan dan veel bewijzen); bij een strenger systeem is dat minder het geval. Ook buiten het axiomatisch systeem heeft formalisering veel voordelen: ze geeft inzicht in de structuur van redeneringen en van meer ingewikkelde problemen als het logicisme (de stelling dat wiskundige problemen in feite wiskundig van aard zijn; is uiteindelijk opgegeven). De voordelen van het formaliseren hangen samen met de syntactische werkwijze, maar toch kan men - ook in de logica - niet geheel van de betekenis afzien. Het doel van de logica is immers de geldigheids- of waarheidsbeoordeling door het volgen van bepaalde regels, die men wel semantisch moet kunnen begrijpen, door er dus een betekenis aan toe te kennen. Onder voorbehoud van deze restrictie kan men toch stellen dat de geformaliseerde taal het voordeel heeft alleen op de vorm van de tekens te slaan, waardoor ongeformuleerde (en dus oncontroleerbare) vooronderstellingen geen rol spelen in de bewijsvoering en de gevolgen van de *wel* geformuleerde regels sneller aan het licht komen. Tot slot worden dubbelzinnigheden en emotionele belastingen die in de gewone taal vaak optreden, vermeden.

Er zijn echter ook nadelen. Zo wordt er wel erg veel geabstraheerd: van de omstandigheden waarin de redenering is gesitueerd, van de concrete formulering, de eigenheid van afzonderlijke talen, van de buitenlogische constanten en van de betekenisnuances in de gewone taal. Hoe meer de nuances van de gewone taal benaderd worden, hoe gecompliceerder een logisch systeem echter wordt. En buiten de logica wordt door filosofen als Wittgenstein II zelfs bestreden dat geformaliseerde talen überhaupt filosofisch nut hebben, omdat de problemen voortkomen uit de gewone taal van het dagelijks leven, waarin vage, open en vloeiende begrippen nu eenmaal nodig zijn.

5.2 Eenplaatsige waarheidsfunctoren

De belangrijkste is de negatie. Ze heeft de eigenschap een ware zin onwaar te maken en andersom.
Syntactische definitie: is p een zin, dan is ook $\neg p$ een zin (blijft ook hetzelfde bij alle tweeplaatsige functoren).
Semantische definitie: ¬ is een eenplaatsige waarheidsfunctor volgens de waarheidstafel:

p	***¬p***
1	0
0	1

Er zijn vier eenplaatsige waarheidsfunctoren (waarheid, identiteit, negatie, onwaarheid), maar voor de logica is praktisch alleen de negatie van belang.

N.B.: een waarheidstafel (matrijs / bevestigingstafel) is de waardenschaal van een warheidsfunctie. Zij toont met andere woorden de logische eigenschappen van een waarheidsfunctor (deze is dus een logische constante).

5.3 Tweeplaatsige waarheidsfunctoren

Tweeplaatsige waarheidsfunctoren hebben twee argumenten: de zinsvariabele p en q met waarden 1 of 0. Bij een eenplaatsige functor zijn er 4 mogelijkheden; bij een n-plaatsige wel 4^n. Van de 16 tweeplaatsige gebruiken we er echter maar enkelen.

1. Het *product*: $\wedge$. In het Nederlands "en", voor zover beide atomaire uitspraken waar moeten zijn om het geheel waar te laten zijn. De conjunctor $\wedge$ impliceert geen volgorde en kan zelfs weggelaten worden, zodat *p* $\wedge$ *q pq* wordt.
   Syntactische definitie: zijn p en q zinnen, dan is ook p $\wedge$ q een zin.
   Semantische definitie: een tweeplaatsige waarheidsfunctor volgens de matrijs 1000:

pq	***p* $\wedge$ *q***
11	1
10	0
01	0
00	0

2. De *logische som* of *inclusieve (of zwakke) disjunctie*: V. In het Nederlands ook wel 'en/of'. Het wordt ook wel een inclusieve disjunctie genoemd omdat het mogelijk is dat beide uitspraken samen waar zijn. Matrijs:

pq	***p* V *q***
11	1
10	1
01	1
00	0

3. De *exclusieve disjunctie* of *contravalentie:* >–<. *Of* het één is waar *of* het ander. Matrijs:

pq	***p* >–< *q***
11	0
10	1
01	1
00	0

4. De *functor van Sheffer:* /. Stelt slechts dat niet beiden tegelijk het geval kunnen zijn.

pq	***p/q***
11	0
10	1
01	1
00	1

5. De *materiële implicatie*: $\rightarrow$. Als het antecedent (implicans) waar is, is het consequens (implicatum) het ook. Omgekeerd geldt dat als het consequens waar is, is het antecedent dat ook; als het consequens niet het geval is, moet het antecedent ontkend worden. De laatste twee volgen uit 'uit het onware volgt om het even wat', maar contrasteert met de gewone taal. Aansluitend bij de gewone taal is de *strikte implicatie* (LCpq) ingevoerd door C.I. Lewis, onder de waarheidstafel 1000. Daarnaast kennen we ook nog de *inferentiële implicatie* ($\Rightarrow$ / streep onder premissen) , waarmee bedoeld wordt dat de deductieregels van het gegeven systeem veroorloven het implicatum af te leiden uit het implicans.

pq	*p → q*
11	1
10	0
01	1
00	1

6. De *equivalentie:* ↔. Dit is een wederkerige implicatie, ook te formuleren als 'dan en slechts dan als' (Eng: 'iff')

pq	*p ↔ q*
11	1
10	0
01	0
00	1

N.B.:

- Het onderscheid tussen de verschillende mogelijke vormen van disjunctie, met name tussen de inclusieve en exclusieve, is niet altijd even duidelijk. Cotravalentie wordt wel eens gemeden, maar het boek houdt liever aan deze functor vast omdat de uitkomst van ¬ (p ↔ q) = 0110, maw de definitie van contravalentie (vandaar ook de naam). Een alternatieve schrijfwijze is de uitdrukking van contravalentie in som en product: (p V q) ∧ (¬ p V ¬ q). Ook andere waarheidsfunctoren kunnen op een dergelijke manier worden 'gereduceerd'. Een dergelijke herdefiniëring is slechts mogelijk als men uitgaat van een van de drie volgende opties: ¬ en V ; ¬ en ∧ ; ¬ en →. Uitgaande van ¬ en ∧ kunnen de andere functoren als volgt gedefinieerd worden:
    - (p ∧ q) wordt ¬ (¬ p V ¬ q)
    - (p → q) wordt ¬ p V q
    - (p ↔ q) wordt ¬ (¬ p V ¬ q) V ¬ (p V q)
    - (p >—< q) wordt ¬ [¬ (p V q) V ¬ (¬ p V ¬ q)]
    - (p / q) wordt ¬ p V ¬ q
- De functoren zijn combineerbaar, met haakjes kan men voorkomen dat de formule dubbelzinnig wordt. Toch is er ook een orde van kracht (zie opsomming). De negatie geldt enkel voor het eerstvolgende symbool.
    1. implicatie en equivalentie
    2. disjuncties (inclusief, exclusief, sheffer)
    3. product
- Er bestaan ook andere schrijfwijzen of notaties.

5.4 Evaluatie

Evaluatie:	Tonen dat een uitdrukking een logische wet is of niet.
Logische wet:	Formele waarheid, zinsfunctie die een ware zin wordt telkens als al zijn variabelen door constanten gesubstitueerd worden (ongeacht de waarheid van afzonderlijke constanten die als argumenten ingevoerd worden); tautologie.
Elementaire uitdrukking:	Uitdrukking die bestaat uit slechts één functor en bijbehorende argumenten.

Contingente formule: Eén die soms waar is, maar niet altijd, afhankelijk van constanten.

Contradictie: Formule die altijd onwaar is, los van constanten.

Er zijn drie methoden om te evalueren:

A. Directe methode. (1) Kijk hoeveel ongelijkvormige variabelen er zijn, (2) stel het aantal mogelijke substituties 2^n vast (elke variabele 0 of 1), (3) realiseer al deze substituties in de elementaire uitdrukkingen en (4) stel de waarheid van de uitdrukking na elke substitutie vast. Is de uiteindelijke waarde 0 of 1? Als er altijd 1 uitkomt, is er sprake van een logische wet. N.B.: heel veel werk.
B. Indirecte methode: aan te raden bij een groter aantal variabelen. Meteen die substituties uitproberen die mogelijk 0 opleveren. Implicatie (1011), conjunctie (1000) en functor van Sheffer (0111) en inclusieve disjunctie (1110) zijn hierbij belangrijk, want hebben een uitzondering in hun output. Als de functie falsifieerbaar is, is ze geen logische wet, anders wel. N.B.: werkt niet altijd.

Bvb. $s \rightarrow [[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (q \rightarrow r)]$ heeft als hoofdfunctor een implicatie (1011).

Zo werken we door tot bij de toekenning van een waarde aan een variabele een contradictie wordt bekomen, of tot we geen volgende stap meer kunnen zetten.

$s \rightarrow [[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (q \rightarrow r)]$

0

1 0

1 0

1 0 1 0

0

1 0 De tweede toekenning aan *q* spreekt de eerste tegen.

Contradictie van falsificatie = onfalsifieerbaarheid = **tautologie**!

C. Directe methode met onmiddellijke substitutie: zoals bij (A) gaat deze methode rechtstreeks alle mogelijkheden na, maar hier tegelijk en dmv een tabel. Slechts als de kolom van de hoofdfunctor alleen maar 1'en bevat, is het een tautologie. N.B.: ook veel werk.

Bvb. $[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ heeft drie variabelen, dus 8 configuraties.

p	q	r	[(p	∨	q)	∧	(¬	q	∨	r)]	→	(p	→	r)
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Deze formule is contingent!

5.5 Elementaire redeneervormen. Wetten en regels

De drie bovengenoemde methodes zijn nog steeds semantisch. Als oplossing wordt hier een volledig syntactische methode voorgesteld, gebaseerd op een lijst van syntactische gevolgtrekkingsrelaties (regels), dwz dat uit zinnen van een bepaalde vorm een zin met een andere vorm volgt. Deze regels ('wat mag') zijn gebaseerd op wetten ('wat is'). We hanteren de materiële implicatie als inferentiële implicatie.

Afleidingswetten: implicatie geldt slechts in ***één richting***

LET OP: je kan er dus **enkel volledige formules** mee vervangen: φ wordt ψ

1. Conjunctie
   - $\{p, q\} \rightarrow (p \wedge q)$ $\qquad$ $\{p, q\} \vdash (p \wedge q)$
2. Simplificatie
   - $(p \wedge q) \rightarrow p$ $\qquad$ $\{(p \wedge q)\} \vdash p$
   - $(p \wedge q) \rightarrow q$ $\qquad$ $\{(p \wedge q)\} \vdash q$
3. Additie
   - $p \rightarrow (p \vee q)$ $\qquad$ $\{p\} \vdash (p \vee q)$
   - $q \rightarrow (p \vee q)$ $\qquad$ $\{q\} \vdash (p \vee q)$
4. Hypothetisch syllogisme
   - $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \vdash (p \rightarrow r)$

5. Ponendo ponens (door te bevestigen bevestigend)
   - $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow q), p\} \vdash q$
6. Tollendo tollens (door te ontkennen ontkennend)
   - $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow q), \neg q\} \vdash \neg p$
7. Ponendo tollens (door te bevestigen ontkennend)
   - $[(p \,/\, q) \wedge p] \rightarrow \neg q$ $\qquad$ $\{(p \,/\, q), p\} \vdash \neg q$
   - $[(p \,/\, q) \wedge q] \rightarrow \neg p$ $\qquad$ $\{(p \,/\, q), q\} \vdash \neg p$
   - $[(p >\!\!-\!\!< q) \wedge p] \rightarrow \neg q$ $\qquad$ $\{(p >\!\!-\!\!< q), p\} \vdash \neg q$
   - $[(p >\!\!-\!\!< q) \wedge q] \rightarrow \neg p$ $\qquad$ $\{(p >\!\!-\!\!< q), q\} \vdash \neg p$

   Nooit samen waar
8. Tollendo ponens (door te ontkennen bevestigend)
   - $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ $\qquad$ $\{(p \vee q), \neg p\} \vdash q$
   - $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$ $\qquad$ $\{(p \vee q), \neg q\} \vdash p$
   - $[(p >\!\!-\!\!< q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ $\qquad$ $\{(p >\!\!-\!\!< q), \neg p\} \vdash q$
   - $[(p >\!\!-\!\!< q) \wedge \neg q] \rightarrow p$ $\qquad$ $\{(p >\!\!-\!\!< q), \neg q\} \vdash p$

   Nooit samen onwaar

9. Disjunctieve koppeling (D.K.) (ook met $>\!\!-\!\!<$)
   - $\big([(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (p \vee q)\big) \rightarrow (r \vee s)$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (p \vee q)\} \vdash (r \vee s)$

9. Constructief dilemma: D.K. met identiek consequent (ook met $>\!\!-\!\!<$)
   - $\big([(p \rightarrow w) \wedge (r \rightarrow w)] \wedge (p \vee q)\big) \rightarrow w$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow w), (r \rightarrow w), (p \vee q)\} \vdash w$

10. Destructieve disjunctieve koppeling (D.D.K.) (ook met $>\!\!-\!\!<$)
    - $\big([(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (\neg q \vee \neg s)\big) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$ $\qquad$ $\{(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (\neg q \vee \neg s)\} \vdash (\neg p \vee \neg r)$

10. Destructief dilemma: D.D.K met identiek antecedent (ook met $>\!\!-\!\!<$)
    - $\big([(u \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow s)] \wedge (\neg q \vee \neg s)\big) \rightarrow \neg u$ $\qquad$ $\{(u \rightarrow q), (u \rightarrow s), (\neg q \vee \neg s)\} \vdash \neg u$

N.B.: bij 9(2) moet (p V q) vervangen worden door (p V r).

<u>Vervangingswetten</u>: equivalenties gelden in ***beide richtingen***

LET OP: je kan er dus ook **delen van formules** mee vervangen: $\Gamma(\varphi)$ wordt $\Gamma(\psi)$

11. Dubbele negatie

- $p \leftrightarrow \neg\neg p$ $\quad \{\Gamma(p)\} \vdash \Gamma(\neg\neg p)$ $\quad \{\Gamma(\neg\neg p)\} \vdash \Gamma(p)$

12. Commutatie

- $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ $\quad \{\Gamma((p \wedge q))\} \vdash \Gamma((q \wedge p))$
- $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $\quad \{\Gamma((p \vee q))\} \vdash \Gamma((q \vee p))$
- $(p \,/\, q) \leftrightarrow (q \,/\, p)$ $\quad \{\Gamma((p \,/\, q))\} \vdash \Gamma((q \,/\, p))$
- $(p \,\text{>—<}\, q) \leftrightarrow (q \,\text{>—<}\, p)$ $\quad \{\Gamma((p \,\text{>—<}\, q))\} \vdash \Gamma((q \,\text{>—<}\, p))$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ $\quad \{\Gamma((p \leftrightarrow q))\} \vdash \Gamma((q \leftrightarrow p))$

13. Tautologie

- $p \leftrightarrow (p \vee p)$ $\quad \{\Gamma(p)\} \vdash \Gamma((p \vee p))$ $\quad \{\Gamma((p \vee p))\} \vdash \Gamma(p)$
- $p \leftrightarrow (p \wedge p)$ $\quad \{\Gamma(p)\} \vdash \Gamma((p \wedge p))$ $\quad \{\Gamma((p \wedge p))\} \vdash \Gamma(p)$

14. De Morgan

- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\quad \{\Gamma(\neg(p \vee q))\} \vdash \Gamma((\neg p \wedge \neg q))$ $\quad \{\Gamma((\neg p \wedge \neg q))\} \vdash \Gamma(\neg(p \vee q))$
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\quad \{\Gamma(\neg(p \wedge q))\} \vdash \Gamma((\neg p \vee \neg q))$ $\quad \{\Gamma((\neg p \vee \neg q))\} \vdash \Gamma(\neg(p \wedge q))$
- $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ $\quad \{\Gamma((p \vee q))\} \vdash \Gamma(\neg(\neg p \wedge \neg q))$ $\quad \{\Gamma(\neg(\neg p \wedge \neg q))\} \vdash \Gamma((p \vee q))$
- $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ $\quad \{\Gamma((p \wedge q))\} \vdash \Gamma(\neg(\neg p \vee \neg q))$ $\quad \{\Gamma(\neg(\neg p \vee \neg q))\} \vdash \Gamma((p \wedge q))$

15. Equivalentie

- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $\quad \{\Gamma((p \rightarrow q))\} \vdash \Gamma([(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)])$
  $\{\Gamma([(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)])\} \vdash \Gamma((p \rightarrow q))$

16. Implicatie

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ $\quad \{\Gamma((p \rightarrow q))\} \vdash \Gamma((\neg p \vee q))$
  $\{\Gamma((\neg p \vee q))\} \vdash \Gamma((p \rightarrow q))$

17. Contrapositie

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ $\quad \{\Gamma((p \rightarrow q))\} \vdash \Gamma((\neg q \rightarrow \neg p))$
  $\{\Gamma((\neg p \vee q))\} \vdash \Gamma((\neg q \rightarrow \neg p))$

18. Associatie

- $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ $\quad \{\Gamma([(p \vee q) \vee r])\} \vdash \Gamma([p \vee (q \vee r)])$
  $\{\Gamma([p \vee (q \vee r)])\} \vdash \Gamma([(p \vee q) \vee r])$
- $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r))$ $\quad \{\Gamma([(p \wedge q) \wedge r])\} \vdash \Gamma([p \wedge (q \wedge r)])$
  $\{\Gamma([p \wedge (q \wedge r)])\} \vdash \Gamma([(p \wedge q) \wedge r])$

19. Exportatie

- $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ $\quad \{\Gamma([(p \wedge q) \rightarrow r])\} \vdash \Gamma([(p \rightarrow (q \rightarrow r)])$
  $\{\Gamma([(p \rightarrow (q \rightarrow r)])\} \vdash \Gamma([(p \wedge q) \rightarrow r])$

20. Distributie

- $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ $\{\Gamma([p \wedge (q \vee r)])\} \vdash \Gamma([(p \wedge q) \vee (p \wedge r)])$
  $\{\Gamma([(p \wedge q) \vee (p \wedge r)])\} \vdash \Gamma([p \wedge (q \vee r)])$
- $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ $\{\Gamma([p \vee (q \wedge r)])\} \vdash \Gamma([(p \vee q) \wedge (p \vee r)])$
  $\{\Gamma([(p \vee q) \wedge (p \vee r)])\} \vdash \Gamma([p \vee (q \wedge r)])$

21. Absorptie

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [p \rightarrow (p \wedge q)]$ $\{\Gamma((p \rightarrow q))\} \vdash \Gamma([p \rightarrow (p \wedge q)])$
  $\{\Gamma([p \rightarrow (p \wedge q)])\} \vdash \Gamma((p \rightarrow q))$

Een wet zegt wat het geval is, een regel pas wat men mag *doen* in termen van afleiden. Regels zijn de grammatica van het correcte redeneren. Ging het in de *semantische methoden* (betekenis van functoren in waarheidstafels) om *waarheid* en *onwaarheid*, in het toepassen van de regels gaat het om *syntactische methoden*. Daar ligt de 'betekenis' van een 'zinsdeel' of '(deel)formule' niet in de waarheid of onwaarheid ervan, maar in de conclusies die eruit kunnen worden getrokken op grond van het feit dat die formule op een bepaalde plaats in de redenering voortkomt. Dan worden er kleine redeneerstapjes opgesteld, gecombineerd tot *afleidingen*. De syntactische *gevolgtrekkingsrelaties* hebben dan de volgende vorm: $\phi_1 \ldots \phi_n / \psi$ (met ϕ en ψ als namen van willekeurige proposities) is syntactisch geldig dan en slechts dan als er een *afleiding* bestaat van ψ (de 'conclusie') uit $\phi_1 \ldots \phi_n$ (de 'premissen').

Beide zijn nodig om geldig te redeneren. De regels hebben betrekking op de structuur van een redenering en bepalen hoe volgens redeneerstappen uit de ene formule of zin tot de andere wordt besloten. Er zijn invoeringsregels en eliminatieregels; bij de eerste wordt er een waarheidsfunctor toegevoegd en bij de laatste verdwijnt er juist één. Het teken dat voor de *syntactische afleidbaarheid* staat, is '⊢'. We schrijven $\phi_1 \ldots \phi_{n-1} \vdash \phi_n$ om aan te geven dat er een afleiding mogelijk is van de formule ϕ_n uit de formules $\phi_1 \ldots \phi_{n-1}$.

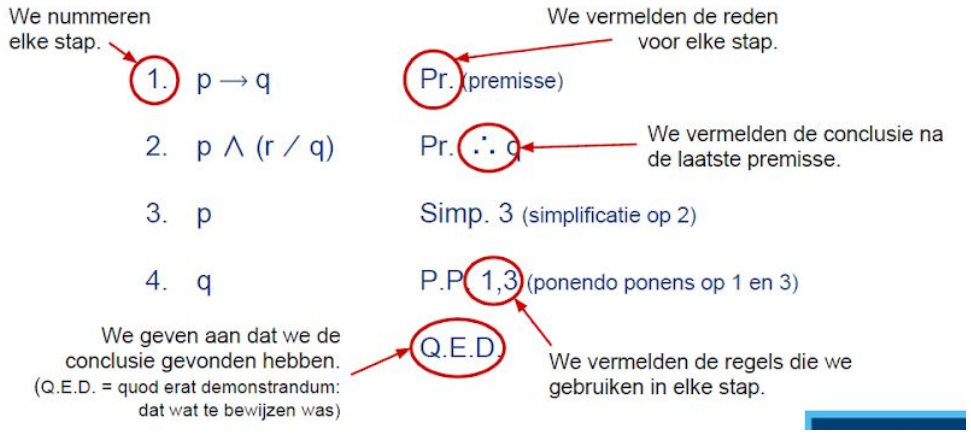
Regels zijn dus de praktijkgerichte afleidingen van wetten. Voorbeelden zijn de Conjunctie-Invoeringsregel (CI) en de Implicatie-Eliminatieregel (CE). Maar in feite kunnen alle 21 wetten worden geformuleerd als regels van een systeem van natuurlijke deductie (voor een strikt syntactisch systeem zouden *alle* regels *en* de axioma's, definities en vormingsregels gegeven moeten worden). Onze benadering blijft echter meer syntactisch, we gaan uit van de tot regels omgevormde 21 wetten, die we *elementaire redeneervormen* noemen.

Het onderscheid tussen wetten en regels is voorts een puur filosofisch probleem, dat zelfs samenhangt met de ontologische vraag of de logische wetten een afspiegeling zijn van de werkelijkheid en de werkelijkheid dus fundamenteel logisch van aard is. Pag. 143-144 geven een schets van een discussie hierover weer.

5.6 Ontleding in elementaire redeneervormen

Het testen van redeneringen met veel verschillende variabelen m.b.v. waarheidstafels of door afleiding uit wetten - dus door ze in te bouwen in een axiomatisch systeem - is erg omslachtig. Daarom ontleden we dergelijke redeneringen in elementaire redeneervormen. In andere woorden: de weg van premissen naar conclusie wordt opgedeeld in stapjes die volgens de 21 logische regels geldig zijn. Het hele bewijs is een redeneervorm, de afzonderlijke stappen zijn elementaire redeneervormen. Er is hierbij vindingrijkheid nodig; waarbij de conclusie steeds in het oog gehouden moet worden. Er zijn verschillende soorten bewijzen mogelijk; op zich maakt het niet uit welke er gebruikt wordt, maar het moet relevant. zijn.

Voorbeeldstructuur:



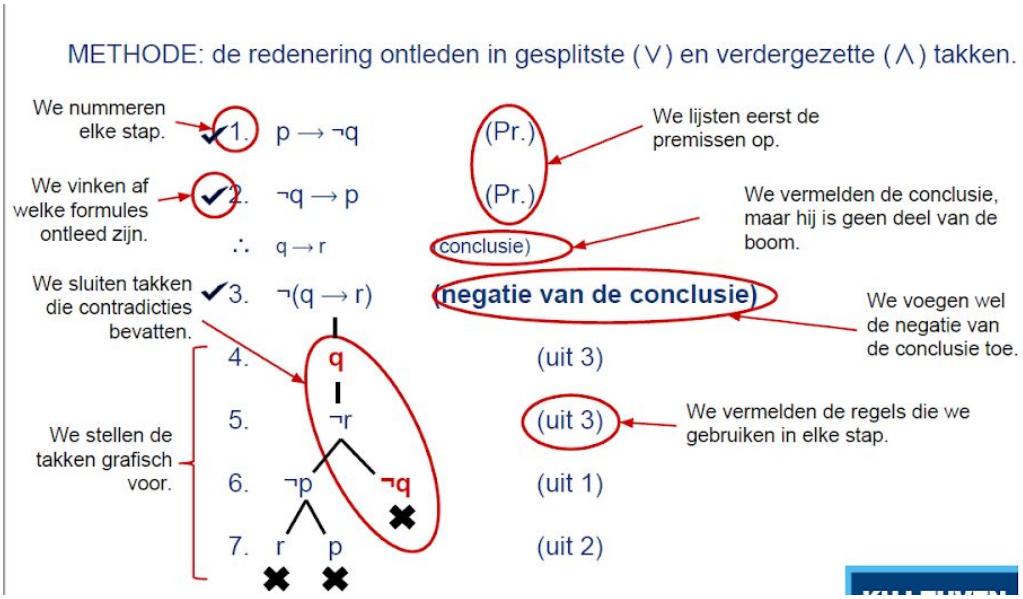
5.7 Het bewijzen van de onjuistheid van een redenering; de waarheidsbomen

Als een redenering niet in elementaire delen te ontleden is, betekent dat nog niet dat ze ongeldig is. Er zijn drie methoden om de ongeldigheid van een redenering aan te tonen:

1. De al genoemde methodes van evaluatie, waarvan de indirecte methode het belangrijkst is.
2. Een tegenvoorbeeld vinden. De methode met waarheidsbomen is zo'n efficiënte syntactische oplossing.
3. Onderlinge onverdraagzaamheid van de premissen aantonen. Dit kan eveneens formalistisch, net als in 5.6 wordt er stap voor stap toegewerkt naar een tegenstrijdigheid. De oorspronkelijke conclusie doet er dan niet eens meer toe.
4. Nagaan van de syntactische zinvolheid van de gegeven formules. Zinloze uitdrukkingen (geen WFF's) zijn niet bruikbaar als premisse of conclusie en dus is geen enkele evaluatiemethode op een dergelijke redenering toepasbaar. Hier zal 5.8 verder op ingaan.

De methode van de waarheidsbomen ("truth-trees", ontleend aan R. Jeffrey) is erg efficiënt. Ze vertrekt vanuit de notie van geldigheid dat bij een geldige redenering zich geen geval (of "situatie") kan voordoen waarin de premissen allen waar zijn, en de conclusie onwaar. Als dat wel zo is, heeft men een "tegenvoorbeeld" en is de ongeldigheid bewezen. Als het daarentegen niet lukt een tegenvoorbeeld te vinden, kan de redenering in kwestie als geldig beschouwd worden.

We zetten eerst de premissen onder elkaar en vervolgens de negatie van de oorspronkelijke conclusie eronder, in plaats van de werkelijke conclusie (omdat de negatie in het gezochte tegenvoorbeeld waar moet zijn). Vervolgens wordt er in de vorm van elementaire delen doorgeredeneerd. Als alle implicaties uit een premisse zijn gehaald, komt er een vinkje voor. Als er meerdere opties zijn, vindt er een splitsing plaats, die voor een inclusieve disjunctie staat. Als één van de uiteinden van de doorredenering *niet* in een contradictie eindigt, is er een tegenvoorbeeld gevonden. Er wordt nog steeds volgens de 21 regels geredeneerd. Het enige nieuwe is de stap naar meerdere opties die in een functie besloten liggen. Bijvoorbeeld: bij (p ↔ q) zijn de opties 'p ∧ q' of '¬p ∧ ¬q'. Voor voorbeelden van waarheidsbomen: pag. 148-152.



N.B.: staat hier een fout in? Of snap ik het helemaal niet?

Om te weten welke formules aanleiding geven tot welke combinatie van gesplitste en verdergezette takken, gebruiken we de regels opgesomd op p. 152.

We hebben vooralsnog de indirecte methode alleen voor functies gebruikt, maar aangezien een inferentie m.b.v. een conjunctor en een implicator tot een functie kan worden herschreven, kan ze ook gebruikt worden om inferenties te testen. Aan de andere kant kan de methode van de waarheidsbomen ook gebruikt worden om te testen of een functie en logische wet is. Ze wordt dan gewoon zelf ontkend en op tegenvoorbeelden onderzocht.

De indirecte methode en de methode van de waarheidsbomen laten alleen zien *dat* een redenering ongeldig is, niet *waarom* dat het geval is. De methode van ontleding in elementaire redeneervormen blijft wat dat betreft toegevoegde waarde houden.

5.8 Het vaststellen van syntactische zinvolheid

Methode 4 (ontleding in elementaire redeneervormen) en 5 (waarheidsbomen) zijn syntactische methoden. Ze zijn dan ook enkel toepasbaar als de formules syntactisch zinvol (WFF's) zijn.

Een syntactisch zinvolle uitdrukking is *een uitdrukking waarin aan alle functoren argumenten beantwoorden naar aantal en syntactische categorie vereist door de syntactische categorie van hun functor*. Een uitdrukking is een functor (implicatie), een argument (het regent) of beiden ('blaft' in de zin 'Bello blaft hard'; ze bepaald Bello maar wordt door 'hard' bepaald). Functoren worden onderscheiden naar aantal-plaatsigheid, naar syntactische categorie van hun argumenten (naam-, uitspraak- en functor*bepalend*) en naar syntactische categorie van het geheel dat ze constitueren (naam-, uitspraak- en functor*makend*). De functorbepalende en –makende categorieën worden buiten beschouwing gelaten. De uitdrukkingen die slechts argumenten zijn, zijn de elementaire categorieën: individuen (*n*), klassen (*n* of *u*) en uitspraken (*e*). Een functor wordt al breuk weergegeven, waarbij de teller staat voor de syntactische categorie die de functor maakt en de noemer voor alle argumenten waar ze betrekking op heeft.

Vanuit deze notatie kan de syntactische zinvolheid als volgt bepaald worden: de functoren en argumenten worden naast elkaar gezet, de functoren vooraan (1), de uitdrukkingen worden

geïndexeerd naar hun syntactische categorie (2), equivalenten boven en onder de breuklijn worden weggestreept (3), de uitdrukking is syntactisch zinvol als er een enkele *'e'* overblijft (4).

Een alternatieve categoriale analyse werkt met de categorieën *'n'* (naamwoord) en *'z'* (zin), waarbij een werkwoord als wandelen de notatie *'n/z'* krijgt, omdat ze een *'n'* nodig heeft om tot een *'z'* te worden.

5.9 Propositielogica, dagelijks taalgebruik, en de wetten van het denken

Zoals gezegd zijn de functoren abstracties. Ze verwijzen naar de structuur van uitspraken, terwijl in het dagelijks taalgebruik niets los van de inhoud te verkrijgen is. De functoren komen in het dagelijks spreken ook in vele verschillende impliciete en expliciete vormen voor.

De eerste beginselen van de logica (of: wetten van het denken) gelden zowel voor het denken als in de werkelijkheid (wat filosofisch natuurlijk veel vragen oproept). Het gaat om de volgende:

a. Beginsel van identiteit: $p \leftrightarrow p$, alles is wat het is.
b. Beginsel van geen tegenspraak: $\neg (p \wedge \neg p)$, niet is tegelijk iets en is het niet, onder hetzeflde opzicht.
c. Beginsel van uitgesloten midden: $p \vee \neg p$, elk ding is iets of het is het niet, er is geen midden tussen die twee.

Hoofdstuk 6 – Traditionele, klassieke en niet-klassieke logica's

6.1 Diverse soorten logica's

In de scholastiek - of ook wel in de traditionele logica (H4) is de term het eindpunt van de analyse. In de vorige eeuw heeft men gezien dat men een term nog kan analyseren naar inhoud en omvang. De klassieke logica is de moderne en verder geformaliseerde uitbreiding op de traditionele logica (H5-7-8). Het axiomatisch systeem dat besproken wordt in 6.2 is een soort overgang, waar de termen niet geanalyseerd worden, maar waar de formalisering wel doorgevoerd wordt en er gebruik wordt gemaakt van de moderne propositielogica. Er wordt een onderscheid gemaakt tussen de "niet zo nieuwe" en de "nieuwe" logica, waarbij de laatste geldt vanaf het moment dat men met twee- en meerplaatsige predikaten gaat werken (7.2). De propositie-, predicaten- en klassenlogica zijn allemaal klassieke systemen, waarvan de wetten analoog aan elkaar zijn. Een nieuwe creatie - maar nog altijd klassiek - is de relatielogica (eind H8).

Een kenmerk van klassieke logica (propositie & predikaten) is dat ze waarheidsfunctioneel is, hetgeen betekent dat we met de waarheidswaarde van de afzonderlijke proposities automatisch de waarheidswaarde van de d.m.v. waarheidsfunctoren samengestelde propositie kunnen berekenen. De waarheidswaarde van een (samengestelde) propositie is dus een functie van (of wordt bepaald door) de waarheidswaarden van de samenstellende proposities. De logische functoren waarbij het mogelijk is adhv waarheidstafels éénduidig de waarheidswaarde van proposities te bepalen die met die functoren zijn gevormd, worden waarheidsfunctionele functoren genoemd (bv: disjunctie). Niet-waarheidsfunctionele logica is bijvoorbeeld de modale logica, die betrekking heeft op redeneringen met modale bijwoorden als 'het is mogelijk dat' of 'het is noodzakelijk dat'. Die bijwoorden kunnen gezien worden als zinsvormende of uitspraakmakende operatoren. Deze logica is niet functioneel, omdat vanuit de waarheid van de proposities 'cirkels zijn rond' en 'Tolstoj schreef literatuur' niet eenduidig tot de waarheid van hun 'het is noodzakelijk dat'-varianten besloten kan worden: die hangt namelijk niet alleen af van de waarheidswaarde van de oorspronkelijke proposities in de feitelijke wereld, maar ook van die in 'mogelijke werelden'.

Evenzo is ook de tijdslogica of temporele logica niet-klassiek, omdat een verleden-tijdoperator bijvoorbeeld niet eenduidig waarheidsfunctioneel is, maar haar resultaat mede afhangt van de feitelijke wereld (voorbeelden gletsjers in Ijsland en Afrika). Logica die niet waarheidsfunctioneel is wordt 'intensioneel' genoemd (tegenover de klassieke 'extensionele' logica). Nog een ander voorbeeld van intensionele logica is de *epistemische logica*, die het logisch gedrag van begrippen als 'weten' en 'geloven' bestudeert. Deze logica duidt nog op een ander verschil tussen de intensionele en extensionele logica: bij de laatste zijn (extensie)gelijke termen intersubstitueerbaard, dus zonder dat de waarheidswaarde van de oorspronkelijke uitdrukking verandert. Bij zinnen die 'weten' of 'geloven' bevatten, is dit niet meer het geval (bv: weten dat Amsterdam de grootste stad is van Nederland vs. weten dat A'dam de hoofdstad is van Ndl). Tot slot behoort de deontologische logica ook tot de klasse van intensionele logica's. Deze houdt zich bezig met de logische structuur van het normatieve taalgebruik, vooral in de ethiek en normatieve juridische systemen.

Naast haar waarheidsfunctionaliteit onderscheid de klassieke logica zich in het gehanteerde *principe van bivalentie*: proposities zijn ofwel waar ofwel onwaar. Dit punt wijst op een andere manier waarop bepaalde soorten logica's 'niet-klassiek' kunnen worden genoemd. Het genoemde principe wordt immers doorbroken door niet-verwijzende namen als 'de koning van Frankrijk', die mede oorzaak waren van de ontwikkeling van *meerwaardige logica's*, waarin er meer waarheidswaardes zijn dan 0 en 1. Zo krijgen uitspraken over de toekomst soms de waarde ½, of zelfs een waarde die samenvalt met de kans. De proposities kunnen gerangschikt worden op een schaal van waarschijnlijkheid, waarbij een waarschijnlijkheidswaarde aan elke propositie wordt toegekend. Dergelijke systemen worden behandeld in de probabilistische of waarschijnlijkheidslogica.

Waar de intensioneel-logische benadering de logica volgens het principe van bivalentie *te zwak*, vindt, is de kritiek van het Intuïtionisme dat ze juist *te sterk* is, en dit meer bepaald in de opvatting dat elke propositie waar of onwaar zou horen te zijn. Haar kritiek is niet semantisch ('de koning van Frankrijk'), maar epistemologisch: een propositie heeft alleen waarheidswaarde als er ook een criterium of methode (mogelijk) is om uit te maken of de propositie waar is of niet. Omdat ze ($p \vee \neg p$) niet als wet erkent, kan deze logica geen gebruik maken van waarheidstafels, die ze dan ook vervangt voor de iets voorzichtigere *asserteerbaarheidstafels*.

6.2 Een axiomatisch systeem van de syllogistiek

Zie boek, maar ik betwijfel of dit te kennen is.

Hoofdstuk 7 – Predicatenlogica

De syllogismen hangen af van de innerlijke structuur van de zinnen. In de propositielogica is daar geen ruimte voor; vandaar de predikatenlogica, waarin predikaten worden toegekend aan individuen. Er worden twee methoden voor de predikatenlogica besproken, nl. die van Copi en die van Bochenski.

7. 1 Eenplaatsige predicaten

A) De eerdere particuliere en universele zinnen worden in de predicatenlogica ondergebracht onder de 'algemene zinnen', die zich onderscheiden van de 'singuliere zinnen'. Een singuliere uitspraak bestaat uit een individu-constante (aangegeven met *a t/m w*; N.B.: de letter *x* bijvoorbeeld wordt gebruikt voor algemene zinnen) en een predikaatsterm (*A t/m Z*). Er wordt geen gebruik gemaakt van een copula, de termen worden gewoon naast elkaar gezet en dan als zinsvariabele behandeld, zodat

meteen de regels van de propositielogica gehanteerd kunnen worden. ‘Socrates is wijs’ wordt dan bijvoorbeeld Ws, en ‘als Socrates wijs is, is hij deugdzaam’ wordt ‘Ws → Ds’.

De ‘*x*’ is geen constante, maar een variabele; waar Ws een uitspraak is, is W*x* dus een functie, die noch waar, noch onwaar is. Om een uitspraak van de functie te maken, moet ze of geïnstantieerd (er wordt een individu-constante ingevoerd) of gekwantificeerd worden: er wordt een quantor ingevoerd. Er is de existentiële quantor (∃*x*) die zegt ‘er is minstens één *x* van dien aard dat’ en er is de universele quantor (*x*) die stelt ‘voor elke *x* geldt dat’. Quantoren slaan op individuen, niet op predikaten. Voor beide geldt dat er minstens één individu is (in ons universum *of* interpretatiedomein). Waar instantiëren tot een singuliere uitspraak leidt, leidt kwantificeren tot een algemene, die dan particulier of universeel kan zijn. Kwantificatie wordt dan ook wel eens “generalisatie” genoemd.

Een *atomaire* zin is bijvoorbeeld (∃*x*) M*x* voor ‘iets is mooi’ (particulier) en (*x*) V*x* voor ‘alles is vergankelijk (universeel). De eerste zin zegt eignelijk: “er is minstens één x zo dat M geldt van x”. Waarschuwing: woorden als ‘iets’, ‘alles’ en ‘geen’ zijn *niet* als eigennamen te hanteren!

De categorische uitspraken uit de syllogistiek zijn in de predicatenlogica kwantificaties van *moleculaire* zinsfuncties. Voorbeeld met M = mens ; G = gelukkig.

- Iba wordt (∃*x*) [M*x* ∧ G*x*]
- Oba wordt (∃*x*) [M*x* ∧ ¬G*x*]
- Aba wordt (*x*) [M*x* → G*x*]
- Eba wordt (*x*) [M*x* → ¬G*x*]

singulier Ws ; ⊤Ws

zinnen

algemeen	atomair	particulier	(∃*x*) M*x* (of negatie)
		universeel	(*x*) V*x* (of negatie)
	moleculair	particulier	(∃*x*) [M*x* ∧ G*x*]
			(∃*x*) [M*x* ∧ ¬G*x*]
		universeel	(*x*) [M*x* → G*x*]
			(*x*) [M*x* → ¬G*x*]

Quantoren maken dus van functies zinnen. Door de variabelen met individuen in te vullen, kunnen we de waarheid van de zinnen nagaan. Voor de universele quantor wordt de waarheidsvoorwaarde van het product gebruikt; voor de existentiële quantor die van de som.

Door de quantificatie is er wel een groot structureel verschil tussen zinnen als A*ba* en (*x*) [M*x* → S*x*]:

1. We zijn van een S-P structuur overgegaan naar een structuur met formele implicaties en producten.
2. Het subject was een verwijzende uitdrukking, terwijl *x* een lege plaats voor een constante is, ze moet nog geïnstantieerd worden.
3. De nieuwe notatie laat zien dat particuliere en universele zinnen een heel verschillende interne structuur hebben. Het is niet meer enkel een kwestie van letters te vervangen, maar men laat zien dat de interne structuur gewijzigd wordt door implicatie tegenover product te

stellen. Vooral belangrijk is dat door de mogelijkheid van lege klassen een universele zin met een lege klas waar is, maar een particuliere onwaar. Hierdoor volgt uit de waarheid van de universele zin die van de particuliere niet meer; we kunnen niet van een implicatie naar een conjunctie overstappen. Bij atomaire zinnen kan dit nog wel.

B) De bewijsvoering in de predicatenlogica kent twee verschillende aanpakken. In de eerste methode (Copi) worden de gekwantificeerde predikaatlogische zinnen geïnstantieerd, waardoor men singuliere zinnen verkrijgt, waarna de regels van de propositielogica worden toegepast, om vervolgens de singuliere conclusies weer te generaliseren of kwantificeren om een particuliere of universele conclusie te verkrijgen. De Tweede methode (Bochenski) vertaalt de regels van de propositielogica in predikaatlogische regels en blijft dan op het niveau van de predikatenlogica functioneren.

Copi werkt dus met instantiaties. Een belangrijk verschil is er tussen universele instantiaties (UI) en existentiële instantiaties (EI). De eerste is de instantiëring van een algemene functie (*x*), waarbij de instantiatie *y* een *ambigue naam* is: ze geldt om het even welk individu. In het systeem van Copi kan men de UI ook voorstellen als (*x*) Vx → Vy. De tweede is een instantiatiëring van een particuliere functie (∃*x*), waarbij de instantiatie *z* een *vaag individu* is, een ons onbekend maar wel specifiek individu. EI wordt ook weergegeven als (*x*) Vx → Vz. Belangrijk is de respectievelijke gebruiken van *y* en *z* goed uiteen te houden. Nadat de conclusies gevonden op het niveau van de instantiatie getrokken zijn, wordt de conclusie d.m.v. een universele of existentiële *generalisatie* (UG of EG) weer gegeneraliseerd.

1)	(x) [Mx → Sx]	Pr	
2)	(x) [Gx → Mx]	Pr	... (x) [Gx → Sx]
3)	My → Sy	UI 1	
4)	Gy → My	UI 2	
5)	Gy → Sy	H.S. 4,3	
6)	(x) [Gx → Sx]	UG 5	

De UG is gebaseerd op het arbitrair karakter van *y*. Dit brengt ook een beperking mee van de UG, nl. dat ze slechts mag worden toegepast op een symbool dat door UI is ingevoerd. Als dat een andere letter dan *y* is, bv. a, dan kan deze virtueel voor meer dan slechts één individu verwijzen. In principe kan ze naar alle individuen verwijzen, maar in feite is de verwijzing beperkt tot bv. Aristoteles. Bij EI kan met ook a, b, c etc. gebruiken, maar ook met datzelfde voorbehoud wat betreft de verwijzing. Men mag dus geen letter invoeren waarvan de verwijzing al eerder werd vastgelegd, bv. a voor Aristoteles. Omdat universele uitspraken wel opgaan voor vage individuen, maar existentiële niet voor ambigue namen is het belangrijk dat als we predikaten willen combineren die afzonderlijk gebruikt worden in universele en existentiële uitspraken, de existentiële instantiatie de voorrang krijgt, op welke instantiatie dan de predikaten van de gegeven universele zin(nen) kunnen worden toegepast, die immers toch voor elk individu gelden. Ze worden dan dus beiden door één en hetzelfde vage individu geïnstantieerd. De letter die voor de instantiatie gebruikt wordt, moet verder wel uniek moet zijn. Verschillende particuliere of existentiële uitspraken kunnen vanzelfsprekend *niet* in één het hetzelfde vage individu geïnstantieerd worden. M.a.w., bij combinatie van EI's moet telkens een andere naam gebruikt worden.

1)	(x) [Kx → Vx]		
2)	(∃x) [Mx ∧ Kx]		... (∃x) [Mx ∧ Vx]
3)	Ma ∧ Ka	EI 2	
4)	Ka → Va	UI 1	

5) Ka Simpl. 3
6) Va P.P. 4,5
7) Ma Simpl. 3
8) Ma ∧ Va Conj. 7,6
9) (∃x) [Mx ∧ Vx] EG 8

Daar de predikatenlogica niet meer gebonden is aan de regels van de syllogistische vorm, heeft de predikatenlogica een groter bereik dan de syllogistiek. Men heeft bijvoorbeeld niet meer de restrictie dat men met 2 premissen en 1 conclusie moet werken. Wel kan de geldigheidsbeoordeling in de predikatenlogica soms anders uitvallen. Er blijven maar 15 van de 24 geldige modi over in de predikatenlogica. WIe er gelijk heeft, hangt dus af van het gekozen systeem. Dit is omdat, vanwege de mogelijkheid van lege klassen, er in de predikatenlogica niet uit een algemene uitspraak kan geconcludeerd worden tot het bestaan van minstens één geval. In de syllogistiek kan dat wel.

Er moeten nog wel twee kanttekeningen bij de methode van Copi gemaakt worden. Ten eerste zijn er beperkingen, hier opgesomd:

- bij instantie & generalisatie moet de hele formule (oude of nieuwe) onder de quantor vallen
- bij instantie moet elke x worden geïnstantieerd door een (ambiguë of vage) naam
- bij generalisatie moet de naam verdwijnen
- UI mag niet op formules voorafgaan door een negatie (een redenering die niet opgaat voor alle individuen, kan tenslotte nog steeds opgaan voor sommigen van hen)
- EI mag niet m.b.v. een al gebruikte naam
- UG is slechts toepasbaar op wat door UI is ingevoerd

Ten tweede moet Copi soms toch werken met wat wij de methode van Bochenski noemen.

C) Bochenski vertaalt de wetten van de propositielogica naar de predikatenlogica. Zo bij P.P.: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ wordt dan bijvoorbeeld *(x)* $\{[(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx] \rightarrow Gx\}$. Hierin functioneert niet alleen *x* als variabele, maar eigenlijk ook *f* en *g*, omdat ze vervangen kunnen worden door iedere willekeurige letter. Toch is het belangrijk om ze hier als hoofdletters te behouden, omdat men anders de logica van de eerste orde verlaat.

De meeste wetten van de predikatenlogica kunnen dus beschouwd worden als vertalingen van wetten van de propositielogica. Toch komen er ook enkele wetten bij die eigen zijn aan de predikatenlogica, omdat ze betrekking hebben op de quantoren. Een voorbeeld hiervan is de wet van de quantorenverwisselingen (Q.V.), die stelt dat de universele en particuliere quantoren verwisseld mogen worden mits daarbij zowel de quantor als de functie in hun negatie worden omgezet. Copi maakt ook gebruik van deze wet, zonder daarbij te verduidelijken dat het om een andere methode gaat. Voorbeelden p.182.

Bochenski werkt met een andere taal dan Copi:

- constanten voor individuen: a, b, c, d en e
- variabelen voor individuen: *x, y, z* (en letters in de buurt)
- quantoren: E(x) en (x)
- naambepalende functoren: ϕ, ψ enz., maar wij werken met f, g, h enz. als constanten voor predikaten, zodat deze niet gekwantificeerd hoeven te worden. Eigenlijk mag men net zo goed een andere letter kiezen en dus functioneren ze eigenlijk als variabelen.

De beperking van Bochenski's methode is dat hij soms toch ook instantiatie nodig heeft, bijvoorbeeld om vanuit *(x)* [(f*x* → g*x*) ∧ fa] tot 'ga' te besluiten. Vanuit een advies van een gelijknamig logicus noemt hij deze operatie dan 'een Albert van Saksen'.

7.2 Tweeplaatsige predicaten

⚠ Dit snap ik precies niet goed.

Bij twee- of meerplaatsige predicaten kunnen we de innerlijke structuur blootleggen van predicaten die naar meerdere objecten verwijzen. Het is even wennen aan de nieuwe notatie, maar verder blijft alles precies hetzelfde werken als bij de éénplaatsige predicaten. Enkele voorbeelden:

- Piet rookt een sigaret: R (p, s).
- Predicaat van x en y: f (x, y).
- Predicaat van x en y dat voor minstens één x en alle y opgaat: (∃x) (y) f(x,y).
- Sommige mensen haten elkaar : (∃x) (∃y) [(mx ∧ my) ∧ (hxy ∧ hyx)].
- Iemand stelt iedereen voor aan iemand: (∃x) (y) (∃z) [sx, y, z].
- De koning van Frankrijk is kaal (volgens Russel): (∃x) [fx ∧ {(y) [fy → (y = x)] ∧ kx}].

(NB: (∃x) (∃y) en s(x, y, z) zijn identiek aan (∃x, y) en [sx, y, z])

'x = y' betekent 'x is identiek aan y'. De identiteit is dus een tweeplaatsige relatie. De drie centrale wetten van de identiteit zijn:

- (x) (x = x) Reflexiviteit
- (x, y) [(x = y) ↔ (y = x)] Symmetrie
- (x, y, z) {[(x = y) ∧ (y = z)] → (x = z)} Transitiviteit

Ook geldt:

- (x, y) {[fx ∧ (x = y) → fy}

7.3 De boommethode als bewijsvoering in de predicatenlogica

In paragraaf 7.3 wordt de boommethode gebruikt om de geldigheid van redeneringen in de predikatenlogica te testen.

v	1) (x) [Mx → Sx]	Pr
	2) Ms	Pr
	4) ¬Ss	
v	5) Ms → Ss	UI 1
	6) ¬Ms SS	regel voor (P → Q)
	x x	

Geen enkele van de in 5.7 gegeven regels is meteen van toepassing op punt 1-4. Door instantiëring van de universele premisse 1) kunnen we echter wel een structuur bereiken waarop de regels van toepassing zijn, omdat het vanaf dan immers om volledige proposities gaat.

v	1) (x) [Ixr → Ihr]	
v	2) ¬Ihr	
v	4) (∃ x) Ixr	
	5) Ihr → Ihr	UI 1
	6) Irr → Ihr	UI 1
	7) ¬Ihr Ihr	regel voor (P → Q) 5

	x	
8) ¬Irr	Ihr	regel voor (P → Q) 6
	x	
9) Icr		EI 4
10) Icr → Ihr		UI 1
11) ¬Icr	Ihr	
x	x	

Bij stap 9) zien we dat het principe van EI gebruikt kan worden om een nieuwe naam in te voeren, op voorwaarde dat de referentie voor die naam nog niet werd vastgelegd. Deze nieuwe naam betekent wel dat stap 1) opnieuw gecontroleerd moet worden.

Zoals in de propositielogica, wordt de ongeldigheid van een redenering bewezen als er geen tegenvoorbeeld voor te vinden is, en dus de boom niet afgesloten kan worden ondanks toepassing van alle mogelijke regels. In de predikatenlogica, kan ongeldigheid echter ook nog op een andere manier voorkomen. Bij het zoeken naar 'logische waarheden' of 'tautologieën' kan het voorkomen dat we er niet in slagen een boom af te sluiten, ondanks het herinvoeren van nieuwe namen tot in het oneindige. Het pad is dan wel oneindig, maar beschrijft toch een tegenvoorbeeld tegen de waarheid van de eerste formule in, al zegt het niet duidelijk hoe dat tegenvoorbeeld er uit ziet. Er wordt dus besloten dat *(predikaatlogische) redeneringen in het algemeen ongeldig kunnen zijn als er ofwel* een moment komt waarop alle mogelijke regels zijn toegepast (inclusief regels die we al kennen uit de propositielogica, samen met UI, EI en Q.V.) terwijl er nog minstens één pad in de boom open blijft, *ofwel* als de boom steeds maar uitgebreid kan worden en nooit kan afgesloten worden.

Tot slot worden de eigenschappen voor de *predikatenlogica met identiteit* bewezen a.d.h.v. de boomstructuur. Daarvoor worden nog twee regels ingevoerd, nl de *regel voor '≠'* die stelt: 'sluit elk pad dat een zin bevat van de vorm 'n ≠ n', waarbij 'n' een naam is voor een constante; en de *regel voor '='*, die zegt dat 'als een open pad een zin bevat van de vorm 'm = n' of 'n = m', waarbij 'm' en 'n' namen zijn voor constanten, samen met andere zinnen die ook 'm' en 'n' bevatten, dan is het mogelijk onderaan dit pad een zin te schrijven die uit één van de vorige ontstaat door vervanging van 'm' door 'n' of omgekeerd.

Kort samengevat kan men stellen dat er voor de boommethode in de predikatenlogica engele bijkomstigheden zijn t.a.v. de boommethode in de propositielogica:

1. Er worden universele en existentiële instantiaties (en generaliseringen) toegepast.
2. Er worden quantorenverwisselingen toegepast.
3. Om de reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit van identiteitsrelaties te kunnen bewijzen, worden twee extra regels ingevoerd:
    a. 'n ≠ n' geldt als afsluiting van een pad.
    b. uit 'a ≠ b' en 'b = a' mag tot de contradicties 'a ≠ a' en 'b ≠ b' besloten worden, om het pad vervolgens af te kunnen sluiten.

Verder: voorbeelden uit het boek bestuderen en oefeningen maken!!

Hoofdstuk 8 – Klassenlogica

Een klas bestaat uit een aantal leden dat één of meer definiërende eigenschappen gemeen heeft en kan dus gezien worden als de extensie van één of meer predikaten. Belangrijk is de symbolisering van de klassen in logische taal te begrijpen. Gewoonlijk wordt een klas aangeduid met de letter van het predikaat, bv. f voor de klas bepaald door predikaat F. Vaak worden echter ook Griekse letters

gebruikt, die in het boek vooral overgenomen worden. “Klas” en “verzameling”, twee termen die door verschillende logische denkers gebruikt werden, worden in het boek door elkaar gebruikt. De vraag of een klas een abstractie is (wegens de abstractor in de definitie) wordt gesteld, maar nog niet beantwoord.

- $\{x \mid \phi x\}$ De klas van alle x’en van dien aard dat ϕx. Dit is de klassenfunctor; achter het streepje staat de definiërende eigenschap. Men kan ook schrijven: ^x (x met een hoedje op) $\{\phi x\}$ (‘abstractor’) of $\lambda x \phi x$ (‘lambdafunctor’). Bijvoorbeeld ϕ is “studeren in Leuven”, dan is $\{x \mid \phi x\}$ de studenten van Leuven.
- α, β, γ Namen van klassen
- $y \varepsilon \{x \mid \phi x\}$ voor: ϕy. Te lezen als: “y is een element van de klasse ϕx”
- $x, y \varepsilon \alpha$ voor: $x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \alpha$
- “klas” voor: $\{\alpha \mid (E\phi)(\alpha = \{x \mid \phi x\})\}$. Dus een definitie die de klas van de klassen aangeeft, in de veronderstelling dat een klas ontstaat door een klasmakende eigenschap.

8.1 Het construeren van nieuwe klassen; betrekkingen tussen klassen

- $\neg\alpha$ (of alpha met een streepje erop) voor: $\{x \mid -(x \varepsilon \alpha)\}$, dus: alle x’en die *niet* tot de klasse α behoren. Dit is een complementaire klas, of ook: A’. Ipv $-(x \varepsilon \alpha)$ kan men ook schrijven ‘x (epsilon met een verticale streep erdoor) α’.
- $\alpha \cap \beta$ voor: $\{x \mid x \varepsilon \alpha \wedge x \varepsilon \beta\}$, het product (of doorsnede), alle x’en die tot beide klassen behoren.
- $\alpha \cup \beta$ voor: $\{x \mid x \varepsilon \alpha \vee x \varepsilon \beta\}$, som (of vereniging), alle x’en die tot minimaal één van beide klassen behoren.
- $\alpha \mid\mid \beta$ voor: $\{x \mid x \varepsilon \alpha / x \varepsilon \beta\}$, disjunctie, alle x’en die tot maximaal één van beide klassen behoren. Ook wel $\alpha \setminus \beta$.
- $\alpha \subset \beta$ voor: $(x)(x \varepsilon \alpha \rightarrow x \varepsilon \beta)$, klasinclusie, ofwel: α is een deelverzameling van β.
- $\alpha = \beta$ voor: $(x)(x \varepsilon \alpha \leftrightarrow x \varepsilon \beta)$, klasidentiteit, ofwel: α en β zijn identiek. Ontkenning: $\alpha \neq \beta$.
- V voor: $\{x \mid x = x\}$, de universele of totale of al-klas. De klas van alle x’en. Dit is het logisch oneindige, ook wel “T”.
- Λ voor: $\{x \mid x \neq x\}$, de lege of nul-klas die geen enkel element bevat. Ook wel ø.

  Er is maar één lege klas (nl. van wat niet bestaat), welke naam we haar ook geven, en ze behoort tot elke klas, omdat ze geen elementen bevat die haar van welke klasse dan ook uitsluiten. Bewijs, zie boek p.198.
- $\exists! \alpha$ voor: $(Ex)\, x \varepsilon \alpha$, ofwel: α is niet leeg.
- $M(\alpha)$ voor: de klas van alle deelklassen van α. (“machtsverzameling”). M[a,b, c} bestaat bijvoorbeeld uit Λ, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b, c}.

Wat betreft de wetten van de klassenlogica, gelden in de eerste plaats wetten analoog aan de logica van de eenplaatsige predicaten (en dus ook aan die van de proposities). De proposities p, q, r worden

simpelweg vervangen voor de klassen α, β, γ. Of ook: fx wordt vervangen door x ε α, gx wordt vervangen door x ε β enz. Zo wordt (x) (fx V -fx) omgevormd naar (x) [(x ε α) V - (x ε α)]: de wet van het uitgesloten derde. fx kan ook door α vervangen worden zoals in '(α U $\neg\alpha$) = V' (zie hieronder). Voor vb'en van klassenlogische wetten, zie boek p.199 (!).

Hiernaast gelden er echter ook een aantal nieuwe wetten in de klassenlogica, namelijk de volgende:

- $\Lambda = \neg V$ — Alles is de negatie van niets.
- (x) x ε V — Alle x'en behoren tot de totale klas ("wat is, is een zijnde").
- (a) a $\subset$ V — Alle klassen vallen binnen de totale klas. Let dus op: epsilon geeft de inclusie van een individu in een klas, '$\subset$' die van een klas in een klas.
- (x) x ε $\alpha \leftrightarrow \alpha$ = V — Als alle x'en tot α behoren, is α de totale klas. Combinatie van twee voorgaande. x wordt dus, om zin onbepaaldheid, beschouwd als lid van de totaalklas.
- (α U $\neg\alpha$) = V — Uitgesloten derde. Alles valt ofwel binnen ofwel buiten een bepaalde klas.
- ($\alpha \cap \neg\alpha$) = Λ — Beginsel van niet-tegenspraak. Niets kan zowel binnen als buiten een bepaalde klas vallen.
- $\alpha \cap$ V = α — Het product van een klasse met de totale klas, doet haar niet van extensie veranderen. Bv: wat een olifant is en al het andere, is nog steeds olifant.
- ($\alpha \subset \beta$) $\leftrightarrow$ [($\neg\alpha$ U β) = V] — Als α geheel binnen β valt, is er niets dat niet *of* buiten α *of* binnen β valt. Alle klassen worden beschouwd als deelkassen van de totaalklas.

Enkele bestaanswetten:

- $\exists$! V — De universele klas is niet leeg.
- $\neg\exists$! Λ — Er behoort niets tot de lege klas.
- $\neg\exists$! $\alpha \leftrightarrow (\alpha = \Lambda)$ — Er is slechts één lege klas.
- $\exists$! $\alpha \leftrightarrow (\alpha \neq \Lambda)$ — Definitie van "bestaan". Als er een x is die tot a behoort, is a geen lege klas.
- $\exists$! ($\alpha \cap \beta$) $\rightarrow$ (E ! α Λ E ! β) — Als het product van α en β niet leeg is, is geen van beiden leeg. Het omgekeerde is niet waar.

8.2 De rechtvaardiging van klassenlogische wetten

Klassenlogische formules die voor alle waarden van de variabelen ware uitspraken opleveren, zijn klassenlogische wetten of tautologieën.

$\rightarrow$ voor zover deze formules de existensionele tegenhangers zijn van de predikaatlogische wetten die analoog zijn aan die van de propositielogica, kunnen ze hierop teruggevoerd worden en dus zo geËvalueerd worden.

→ ook de klassenlogische formules die niet dezelfde structuur hebben als de propositielogische, kunnen er nog analoog aan zijn, voor zover de gebruikte klassenlogische constanten analoog zijn aan die van de propositielogica. Voor de vertalingsregels, zie boek p.200 (!). Er zijn echter wel complicaties: in de klassenlogica spelen afspraken over het aantal elementen in een universum een belangrijke rol. De laatste van de voorafgenoemde wetten zou bij terugvoering op de propositielogica als een equivalentie beschouwd kunnen worden, maar dat mag niet in de klassenlogica; dat zou enkel geldig zijn bij een éénledig universum.

→ in sommige gevallen blijkt het wet-zijn uit gegeven definities. Zo bv. bij (x) x ε V en bij $\exists$! V, waarvan die laatste zegt dat de universele klas niet leeg is; wat volgt uit het feit dat de universele klas alle leden van ons universum bevat, en dit universum geacht wordt niet leeg te zijn.

8.3 Werken met klassenlogische wetten: de syllogistiek

Eens dat van een klassenlogische formule vaststaat dat ze een wet is, kunnen we er ook mee werken; bijvoorbeeld ter rechtvaardiging van de geldigheid van syllogismen. Voor een werkwijze, zie boek p.201-2. Belangrijk is de herschrijving van categorische uitspraken op die manier dat universele zinnen samenvallen met de lege klas; en particuliere zinnen er niet mee samen vallen (identiteiten zijn of niet-identiteiten zijn):

A*ba* ⇒ $B \cap A' = \emptyset$

E*ba* ⇒ $B \cap A = \emptyset$

I*ba* ⇒ $B \cap A \neq \emptyset$

O*ba* ⇒ $B \cap A' \neq \emptyset$

Verder worden wetten van commutatie, assimilatie, expansie, lege vereniging, niet lege vereniging, vereniging met lege klas gebruikt. Voor de bewijsvoering past men eerst expansie toe, alsook het uit elkaar halen van universele premissen, om ze later eventueel terug te combineren waardoor de conclusie gevormd kan worden. In het geval dat één van de premissen particulier is, is er een niet-identiteit en is de werkwijze iets anders. Eerst wordt expansie toegepast op de premissen, waarna er gekeken wordt of een deel van de particuliere premisse leeg is volgens een deel van de universele. Dan worden V.L. en N.D.L. toegepast, waarbij de conclusie overblijft. Voor verdere uitleg en voorbeelden, zie boek.

8.4 Enkele noties uit de logica van de relaties

Het gaat hier om relaties tussen logische variabelen, die genoteerd worden als xRy. Vanzelfsprekend heeft x daarbij de relatie R tot y, waarbij x het antecedent en y het consequens wordt genoemd. Hier worden nog een aantal notaties aan toegevoegd, namelijk van de converse relatie en van het domein, co-domein en veld van R. De betekenis hiervan kan op blz. 204 gevonden worden. Tot slot worden de drie wetten van de identiteit (reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit) in termen van de relatielogica weergegeven. Aangezien identiteit een relatie is, kan dat vrij eenvoudig.

8.5 Enkele noties uit de modale logica

Alle redeneringen tot nu toe waren *assertorische redeneringen*, hetgeen wil zeggen dat het gegeven verband tussen de zinnen (i/d propositielogica) of termen (i/d syllogistiek of predicatenlogica) eenvoudig werd geponeerd, zonder het hypothetische verband, de inherentie of het samengaan te kwalificeren. Als men dit wel doet, en als er in minstens één propositie de “modus” van verband of inherentie wordt uitgedrukt, dan heeft men een modale redenering. De verschillende modi zijn:

noodzakelijkheid, (on)mogelijkheid en contingentie (contingentie = het is mogelijk dat het is en dat het niet is). De modale logica verdisconteert deze modi. De formuleringen zijn:

- $\Box$ p (of L*p*) p is noodzakelijk (niet-p is onmogelijk)
- $\Diamond$ p (of M*p*) p is mogelijk (niet-p is contingent)
- $\neg \Box$ p (of Zp) p is contingent
  wordt ook wel voorgesteld als een ruitje met een puntje er in
- $\neg \Diamond$ p (of U*p*) p is onmogelijk

Op blz. 205 staat een vierkantje dat de onderlinge verhoudingen van de verschillende modi goed laat zien.

Met de premissen: "het is noodzakelijk dat de mens sterfelijk is" en "Piet is noodzakelijk een mens", dan is de conclusie in Barbara "Het is noodzakelijk dat Piet sterfelijk is" en in Barbari "Het is mogelijk dat Piet sterfelijk is".

Met bovenstaande vier grondmodaliteiten kan men verdere wetten uitwerken (zie boek p.206).

Tot slot is het belangrijk te zien dat 'p is mogelijk' in de logica (i.t.t. stond te natuurlijke taal) nog niet impliceert dat niet-p ook mogelijk is. Zie nog verdere toelichting in boek.

Aanvulling bij 6.1 - intensionele propositielogica

1. Inleiding

Verschillende soorten intensionele constructies en hun combinaties worden hier bestudeerd:

- modale propositielogica
- propositionele tijdslogica
- epistemische logica (*geloven en weten*)
- deontologische logica (*mogen en behoren*)

Eerst volgt nu een deel over de semantiek achter deze verschillende constructies, waarbij de volgende auteurs belangrijk waren: Rudolf Carnap, Stig Kanger, Jaakko Hintikka, maar toch vooral Saul Kripke (vanwaar de benoeming).

2. Kripke-semantiek

Aan het vocabulair van de propositielogica wordt het eenplaatsig connectief O toegevoegd. Voor een formule ϕ geplaatst wordt een nieuwe formule Oϕ verkregen. O wordt een operator genoemd, en kan staan voor verschillende intensionele constructies. Nieuwe formules worden hiermee verkregen (zie kopie), maar de oorspronkelijke extensionaliteit van de propositielogica gaat wel verloren, cf. als p $\leftrightarrow$ q waar is, is Op $\leftrightarrow$ Oq nog niet per se waar. Afhankelijk van de beoogde interpretatie van O moeten nu bepaalde aspecten van de context in rekening gebracht worden. Voor een temporele constructie (*het zal altijd het geval zijn dat; het was eens het geval dat*) is dat een tijdstip; voor een modale constructie (*het is noodzakelijk dat; het is mogelijk dat*) zijn dat mogelijke situaties; voor een combinatie van de twee zal de context een mogelijke situatie op een bepaald tijdstip representeren. Kortom, afhankelijk van de interpretatie van O, kan de verzameling K waarvan de elementen als contexten optreden, veel gedaantes aannemen.

Uit het voorgaande volgt een contextafhankelijk waarheidsbegrip: beweringen zijn niet meer zonder meer waar of onwaar, maar relatief aan een context k uit de verzameling contexten K. Wel blijft de waarde van de propositielogische connectieven zoals een negatie hetzelfde. Wat verandert, is dus

dat niet enkel context k in rekening gebracht moet worden, maar ook alternatieve contexten k' uit K. Niet enkel de waarde van ϕ in k speelt nu een rol, maar ook in k'. Dat is het kenmerkende van een intensionele constructie. Bv. voor *het was eens het geval dat p* in context k moet je ook denken aan de tijdscontext k' voor k; bij *ik weet dat p* in een context k is p ook waar in alle andere contexten k' die verenigbaar zijn met de kennis die ik heb in k (= *epistemische alternatieven*in k).

Let wel: voor het bepalen van de waarheidswaarde van Oϕ in k, is de waarheidswaarde van ϕ in alle k' uit K niet meteen relevant. Welke contexten relevant zijn voor die bepaling van de waarheidswaarde van Oϕ, hangt deels af van de interpretatie van O: vb'en van interpretaties van O: *het is logisch noodzakelijk dat* → alle k' uit K ; *het is fysisch noodzakelijk dat* → alle contexten k' uit K met dezelfde fysische wetten ; *het was eens het geval dat* → contexten k' eerder dan k. Deels hangt dat ook af van k zelf: als k en k' verschillend zijn, dan zijn tijdstippen voor k ook verschillend van tijdstippen voor k'; bij een epistemische interpretatie van O is dit ook zo, denk maar aan een schaakspel waarbij de epistemische alternatieven verschillen van zet tot zet.

De voor k relevante contexten noemen we *bereikbaar vanuit* k. Samengevat: voor de waarheidswaarde van Oϕ in k zijn alleen de waarheidswaarden van ϕ in de vanuit k bereikbare contexten k' van belang. Hoe de waarheidswaarden van ϕ in die bereikbare contexten k' een rol spelen voor de waarheidswaarde van Oϕ in k, is dan afhankelijk van de interpretatie van O. Vergelijk *het is noodzakelijk dat* (waarbij ϕ waar moet zijn in alle bereikbare contexten) en *het is mogelijk dat* (waarbij ϕ enkel waar moet zijn in tenminste een bereikbare context). Iedere interpretatie van O leidt dus tot een bepaalde conditie op de waarheidswaarden van ϕ in de bereikbare contexten die vervuld moeten zijn, wil Oϕ waar zijn in een bepaalde context.

<u>Definitie 1</u>
Een *Kripke-model* M bestaat uit:
(i) een niet-lege verzameling K van contexten
(ii) een tweeplaatsige relatie R op K, de bereikbaarheidsrelatie
(iii) een waardering V die aan elke propositieletter p in elke context k $\in$ K een waarheidswaarde, $V_k(p)$ toekent

Obv deze definitie wordt een waarheidsdefinitie opgesteld, waarin wordt vastgelegd wat, gegeven een Kripke-model M, de waarheidswaarde van een formule ϕ in een context k is, geschreven als $V_{M,k}(\phi)$. N.B.: de clausules voor de standaardconnectieven blijven dezelfde; de clausule voor de intensionele operator O hangt af van diens interpretatie. Vaak wordt een Kripke-model M voorgesteld met een figuur, bestaande uit punten voor k en pijlen voor R. Zie vb'en in kopie.

Vanuit de verwijzingen naar alternatieve contexten k' wordt ook duidelijk waarom extensionaliteit in deze logische systemen faalt: p ↔ q biedt geen garantie voor Op ↔ Oq gezien er andere contexten dan k een rol kunnen spelen.

3. Modale propositielogica

Eerste belangrijke opmerking: de modale begrippen komen niet uit de natuurlijke taal, maar uit de filosofie. Bijgevolg beperkt men zich gewoonlijk tot de filosofische modaliteiten *het is noodzakelijk het geval dat, het is mogelijk het geval dat, het is contingent dat*.

In de kopie wordt de bestaansgeschiedenis van de modale logica geschetst. Kort kan men stellen dat de modale logica aan bod kwam in de traditionele logica (Aristoteles, de Scholastici en Kant), maar in de moderne logica geschrapt werden (Frege: de inhoud verandert niet en alleen de inhoud is van belang). Toch sloop de modale logica ook in de moderne logica weer binnen dankzij C.I. Lewis die moeite had met de *materiële implicatie* en daarom de *strenge implicatie* --3 (iets dat er op lijkt)

invoerde, die meer betekenisaspecten van de implicatie moest formaliseren. Een materiële implicatie is equivalent met $\neg(\phi \wedge \neg \psi)$; een strenge implicatie is dan $\neg\Diamond(\phi \wedge \neg \psi)$, dat op zijn beurt weer equivalent is met $\Box\neg(\phi \wedge \neg \psi)$, waarmee *het is mogelijk dat* en *het is noodzakelijk dat* opnieuw werden binnengehaald. De strenge implicatie kan dus ook geïnterpreteerd worden als de *noodzakelijke materiële implicatie*.

Bij de modale logica treedt, in tegenstelling tot de klassieke Fregeaanse logica, wel onzekerheid over de te poneren principes op. Voordehandliggend is dat *onmogelijk = noodzakelijk niet* en dat *onmogelijk niet = noodzakelijk wel*; alsook *noodzakelijk waar → waar* en dat strenge gevolgen van noodzakelijke waarheden zelf noodzakelijk waar zijn (kan ook herscheven worden als de gemodaliseerde vorm van de *modus ponens*) (voor alle symbolische weergave zie kopie). Moeilijker wordt te bepalen of een principe al dan niet geldig is als er *stapelingen* optreden zoals 'als iets noodzakelijk waar is, dan is dat noodzakelijk zo' of 'wat mogelijk noodzakelijk is, is waar'. Die onzekerheid kan gezien worden als een symptoom dat verschillende modaliteitsbegrippen in onze intuïties door elkaar lopen. Kripke's ideeën, opgekomen rond de jaren '60, boden hier een welgekomen oplossing voor.

Kripke's ideeën komen erop neer dat de propositielogical met $\Box$ en $\Diamond$ verrijkt wordt door aan de definitie van een propositielogische taal L de volgende clausule toe te voegen: als ϕ een formule is van L, dan zijn $\Box\phi$ en $\Diamond\phi$ ook formules van L. Hieruit volgt dat ook $\Box p$, $\Box p \vee \Diamond p$, $\neg\Diamond(p \wedge q)$, $p \rightarrow \Box\Diamond p$ en $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ formules zijn. Stapelingen van operatoren heten ook *iteraties*.

Oefening 1: zie kopie.

Kripke's semantiek wordt ook wel aangeduid als *mogelijke wereldensemantiek* aangezien hij, in de modale logica, contexten aanduidt als 'mogelijke werelden' en zodus de semantiek van modale uitspraken in termen van 'mogelijke werelden' analyseerde. Het idee achter Kripke's semantiek is dat de waarheid van $\Box\phi$ en $\Diamond\phi$ in een mogelijke wereld afhangt van de waarheid van ϕ in andere mogelijke werelden (vgl.: k'). Niet alle andere werelden spelen per se een rol, dus ook hier is de bereikbaarheidsrelatie of *toegankelijkheidsrelatie* van belang.

<u>Definitie 2</u>
Een *Kripke-model M voor de modale propositielogica* bestaat uit:
(i) een niet-lege verzameling W van mogelijke werelden
(ii) een tweeplaatsige relatie R op W, de toegankelijkheidsrelatie
(iii) een waardering V die aan elke propositieletter p in elke mogelijke wereld $w \in W$ een waarheidswaarde toekent: $V_w(p)$.

(i) + (ii) wordt een *frame* (of *structuur*) genoemd. Een model M bestaat dus uit een frame F en een waardering V. Verschillende waarderingen V leveren, toegevoegd aan eenzelfde frame F, dus verschillende modellen M. Een model is een volledige specificatie van een bepaalde toestand van de actuele en mogelijke werkelijkheid. F biedt het geraamte dat aan de basis van verschillende mogelijke toestanden kan liggen.

De waarheidsdefinitie vertelt ons nu wanneer, gegeven een model M, formules ϕ waar zijn in een wereld w, afhankelijk van de waarheidswaarden V vastgelegd in de mogelijke werelden. Of ook: de waarheidsdefinitie legt vast hoe, gegeven M, de waardering V van de propositieletters eenduidig kan worden uitgebreid tot een waardering V_M voor alle formules. Ook hier hangt de waarheidswaarde van een samengestelde formule dus af van de waarheidswaarde van de samenstellende delen. Anders is dat hier de waarheidswaarde van de samengestelde als van de samenstellende delen

afhankelijk is van andere werelden. De waarheidsdefinitie voor de modale propositielogica is dan als volgt:

<u>Definitie 3</u>
Als M een Kripke-model is met een verzameling mogelijke werelden W, toegankelijkheidsrelatie R en waardering V, dan is $V_{M,w}(\phi)$, de waarheidswaarde van ϕ in w gegeven M, als volgt gedefinieerd:

(i) $V_{M,w}(p) = V_w(p)$, voor alle propositieletters p

(ii) $V_{M,w}(\neg\phi) = 1$ desda $V_{M,w}(\phi) = 0$

(iii) $V_{M,w}(\phi \rightarrow \psi) = 1$ desda $V_{M,w}(\phi) = 0$ of $V_{M,w}(\psi) = 1$

(iv) $V_{M,w}(\Box\phi) = 1$ desda voor alle $w' \in W$ zodat wRw': $V_{M,w'}(\phi) = 1$
Dus begrepen als: *waar in alle toegankelijke werelden*

(v) $V_{M,w}(\Diamond\phi) = 1$ desda voor tenminste één $w' \in W$ zodat wRw': $V_{M,w'}(\phi) = 1$
Dus begrepen als: *waar in tenminste één toegankelijke wereld*

De connectieven van de propositielogica ($\neg$, $\rightarrow$, V, $\wedge$) worden hier dus op dezelfde manier gebruikt. Pas bij $\Box$ en $\Diamond$ spelen de mogelijke werelden een rol. Merk ook op: analogie tussen *noodzakelijk* en de universele kwantor, en tussen *mogelijk* en de existentiële kwantor. Uit deze analogie volgt ook dat de twee begrippen interdefinieerbaar zijn, waarmee ook de geldigheid wordt verantwoord: $\Diamond$is bijvoorbeeld definieerbaar als $\neg\Box\neg$.

Voor verdere voorbeelden, zie figuur 2.2 en 2.3 in kopie. Let op de notaties: $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ en $R = \{<w_1,w_2>, <w_2,w_2>, <w_2,w_3>\}$ waarmee dus de frame F van het model M is bepaald. Als, zoals in figuur 2.2, er slechts één propositieletter p is, dan is ook de waardering V vastgelegd $V_{w1}(p) = V_{w2}(p) = 1$ en $V_{w3}(p) = 0$; en daarmee - obv de waarheidsdefinitie - de waarheidswaarden van alle formules gegeven. Hiermee is dan het model M bepaald. De waarheidswaarden van $\Box p$ en $\Diamond p$ zijn misschien iets moeilijker te achterhalen. In figuur 2.2 zijn die vrij makkelijk te bepalen in w_1 en w_2, maar in w_3 moeten we even opletten: $V_{M,w3}(\Diamond p) = 0$ en $V_{M,w3}(\Box p) = 1$ omdat er geen vanuit w_3 toegankelijke werelden zijn en dus in al die werelden waar is; zo is ook $V_{M,w3}(\Diamond\neg p) = 0$ en $V_{M,w3}(\Box\neg p) = 1$. Bij stapeling van modale operatoren ligt het nog iets ingewikkelder, zie figuur 2.3. $\Box\Diamond p$ is waar in w_1 als in alle mogelijke werelden w' waartoe w_1 toegang geeft, er tenminste één wereld is waarin p waar is. Oftewel: als in alle w' zodat w_1Rw' geldt dat $V_{M,w'}(\Diamond p) = 1$. $\Diamond\Box\neg p$ is waar in w_1 als er tenminste een w' is zodat w_1Rw' waarin $\Box\neg p = 1$.

Merk op: er zijn bij een gegeven M ook formules ϕ die in elke wereld van dat model waar zijn; zulke formules zijn *geldig* in M en worden weergegeven als $V_M(\phi) = 1$. Daarbinnen zijn sommige ϕ afhankelijk van V, andere onafhankelijk van V. De eerste groep zijn feiten in het model beschreven, de tweede worden afgeleid uit de structuur of frame van M. Zie figuur 2.4 en de formules $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$ (eerste groep) versus $\Box p \rightarrow p$ (tweede groep). Figuur 2.5 is hierbij voor die laatste formule een *tegenvoorbeeld*.

Er is dus een verband tussen de geldigheid van een bepaalde formule en het frame dat aan een model ten grondslag ligt. Een formule ϕ die geldig is op elk model met een bepaald F, dan is ϕ *geldig op* F. Zo'n formule drukt vaak een eigenschap uit van een hele klasse van frames. Bijvoorbeeld de formule $\Box p \rightarrow p$ *karakteriseert* de klasse van relatieve frames, aangezien de formule waar is in elke F waar de toegankelijkheidsrelatie R *reflexief* is. Zie figuur 2.6. Bij een F waarin R niet reflexief is, is altijd een tegenvoorbeeld mogelijk, dus een model M met F als frame waarin V zo wordt gekozen dat $\Box p \rightarrow p$ onwaar wordt in tenminste één w.

Dit bestuderen van het verband tussen geldigheid van bepaalde formules en eigenschappen van frames is een van de voornaamste bezigheden van modale logici. Er wordt teruggekomen op enkele voorgenoemde principes (eerder uitgeschreven in tekst).

- $\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$ is een eigenschap die geldt zonder een verband met de toegankelijkheidsrelatie
- $\Box\phi \rightarrow \phi$ komt overeen met *reflexiviteit*
- $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ komt overeen met *transitiviteit*
- $\Diamond\Box\phi \rightarrow \phi$ komt overeen met *symmetrie*

Maar deze flexibiliteit kent wel zijn grenzen. Zo is er bijvoorbeeld geen formule die overeenkomt met *irreflixiviteit*.

Oefening 2, zie kopie.

DEEL III - INFORMELE LOGICA

Hoofdstuk 9 - Informele logica en het topisch redeneren